RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE PIERWSZEGO RZĘDU

I. Równania o zmiennych rozdzielonych

Przekształcamy tak, żeby uzyskać:

$$(\text{związek } z\ y)\cdot dy = (\text{związek } z\ x)\cdot dx \qquad /\int$$

$$\int(\text{związek } z\ y)\cdot dy = \int(\text{związek } z\ x)\cdot dx$$

$\downarrow$

Rozwiązanie

II. Równania typu $y' = f(ax+by+c)$

Podstawiamy: $t = ax+by+c$, wyznaczamy y' i przechodzimy na równanie typu I

(o zmiennych rozdzielonych).

III. Równania typu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Podstawiamy: $t = \frac{y}{x}$, wyznaczamy y' i przechodzimy na równanie typu I (o zmiennych rozdzielonych).

IV. Równania typu $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Jeśli $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, wtedy:

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$, mamy rozwiązanie $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

podstawiamy $\begin{matrix} x=u+\alpha \\ y=v+\beta \end{matrix}$, oraz $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$ i przechodzimy na równanie typu III.

Jeśli $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, wtedy:

wyciągamy a_1, a_2 przed nawias ze składników z x i y i przechodzimy na równanie typu II.

V. Równania liniowe $p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = r(x)$

1. Rozwiązujemy równanie $p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = 0$. Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Mamy rozwiązanie w postaci: $y = C\cdot\ldots$.

2. W rozwiązaniu $y = C\cdot\ldots$ „uzmienniamy stałą” i mamy $y = C(x)\cdot\ldots$.

3. Z powyższego obliczamy y'.

4. y' i y wstawiamy do wyjściowego równania. Składniki z $C(x)$ powinny się skrócić. Wyznaczamy $C'(x)$.

5. Związek $C'(x) = \ldots$ obustronnie całkujemy. Mamy wynik: $C(x)$.

6. $C(x)$ wyznaczone w 5. wstawiamy do 2. i mamy rozwiązanie.

VI. Równania Bernoulliego $p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = r(x)y^n$

Podstawiamy: $z = y^{1-n}$, z tego podstawienia wyznaczamy y, y', y^n i wychodzimy na równanie liniowe (typu V).

VII. Równania Riccatiego $y' = p(x)\cdot y^2 + q(x)y + r(x)$

Mamy dane rozwiązanie (całkę) szczególną: $y_1(x)$

Podstawiamy: $y = y_1(x) + \frac{1}{u}$ i wychodzimy na równanie liniowe (typu V).

VIII. Równania Clairauta $y = xy' + f(y')$

Równanie obustronnie różniczkujemy, wychodzimy na równanie: $y''\left(x + f'(y')\right) = 0$, z równań $y'' = 0$ i $x + f'(y') = 0$ wyznaczamy y' ($y'' = 0$ obustronnie całkujemy) i wstawiamy do wyjściowego równania, otrzymując w ten sposób rozwiązania.

IX. Równania różniczkowe zupełne $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

Spełniony musi być warunek: $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)\\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)\end{cases}$, rozwiązaniem jest funkcja $F(x,y)$.

Rozwiązanie całego równania zapisujemy w postaci: $F(x,y)=C$.

X. Czynnik całkujący $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

Jeśli warunek $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ nie jest spełniony, szukamy czynnika całkującego $\mu(x,y)$.

I.

Jeśli związek $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ jest funkcją tylko zmiennej x, wtedy $\mu(x,y)=\mu(x)=e^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}$

II.

Jeśli związek $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ jest funkcją tylko zmiennej y, wtedy $\mu(x,y)=\mu(y)=e^{\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}$

Równanie wyjściowe obustronnie mnożymy przez znalezione $\mu(x)$ lub $\mu(y)$ i otrzymujemy równanie typu IX (zupełne).

XI. Równanie różniczkowe rodziny linii

Aby otrzymać równanie różniczkowe rodziny linii $F(x,y,C)=0$ należy to równanie rodziny linii obustronnie zróżniczkować i z otrzymanych równań „wyrugować” parametr.

Aby otrzymać równanie rodziny linii ortogonalnych do $F(x,y,C)=0$, należy w równaniu różniczkowym tej rodziny linii zastąpić y' związkiem $-\frac{1}{y'}$. Otrzymamy w ten sposób równanie różniczkowe rodziny linii ortogonalnych, które możemy jeszcze rozwiązać.