RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE DRUGIEGO RZĘDU

XII. Równania liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$ay''+by'+cy=r(x)$$

Metoda przewidywań

$$y=y_j+y_p$$

ETAP 1: Rozwiązujemy równanie jednorodne.

$$ay''+by'+cy=0$$

$$ar^2+br+c=0$$

$$\Delta=?$$

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
r_1, r_2	r_0	$r_1=\alpha-\beta i$ $r_2=\alpha+\beta i$
$y_j=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$	$y_j=C_1e^{r_0x}+C_2xe^{r_0x}$	$y_j=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

Mamy rozwiązanie jednorodne: y_j

ETAP 2: Znajdujemy „rozwiązanie przewidywane”.

Bierzemy pod uwagę $r(x)$ z równania $ay''+by'+cy=r(x)$ i określamy postać ogólną y_p

$r(x)$	y_p
WIELOMIAN	POSTAĆ OGÓLNA WIELOMIANU TEGO SAMEGO STOPNIA
WIELOMIAN $\cdot e^{ax}$	(POSTAĆ OGÓLNA WIELOMIANU TEGO SAMEGO STOPNIA) $\cdot e^{ax}$
WIELOMIAN $\cdot\sin ax$ + WIELOMIAN $\cdot\cos ax$	(POSTAĆ OGÓLNA WIELOMIANU TEGO SAMEGO STOPNIA) $\cdot\sin ax$ + (POSTAĆ OGÓLNA WIELOMIANU TEGO SAMEGO STOPNIA) $\cdot\cos ax$
WIELOMIAN $\cdot e^{ax}\sin bx$ + WIELOMIAN $\cdot e^{ax}\cos bx$	(POSTAĆ OGÓLNA WIELOMIANU TEGO SAMEGO STOPNIA) $\cdot e^{ax}\sin bx$ + (POSTAĆ OGÓLNA WIELOMIANU TEGO SAMEGO STOPNIA) $\cdot e^{ax}\cos bx$

Z postaci ogólnej y_p liczymy pochodną i pochodną drugiego rzędu y_p', y_p'', wstawiamy do równania $ay'' + by' + cy = r(x)$ i wyznaczamy stałe do postaci ogólnej y_p poprzez porównywanie wielomianów.

Mamy rozwiązanie przewidywane: y_p

Odp. $y = y_j + y_p$

<u>Metoda uzmienniania stałych</u>

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

ETAP 1: Rozwiązujemy równanie jednorodne (jak wyżej).

Mamy rozwiązanie jednorodne: y_j

W rozwiązaniu tym „uzmienniamy stałe” i mamy: $y = C_1(x) \cdot \square + C_2(x) \cdot \Delta$

ETAP 2: Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \square + C_2'(x) \cdot \Delta = 0 \\ C_1'(x) \cdot \square' + C_2'(x) \cdot \Delta' = \dfrac{r(x)}{a} \end{cases}$$

Rozwiązujemy go (układ Cramera), wyznaczamy $C_1(x)$ i $C_2(x)$, wstawiamy je do otrzymanego w ETAPIE 1 związku $y = C_1(x) \cdot \square + C_2(x) \cdot \Delta$ i mamy odpowiedź.

XIII. Równanie sprowadzalne do rzędu pierwszego typu $F(x, y'') = 0$

Równanie $y'' = (\ldots)$ obustronnie całkujemy.

XIV. Równanie sprowadzalne do rzędu pierwszego typu $F(x, y', y'') = 0$

Podstawiamy $p = y'$.

XV. Równanie sprowadzalne do rzędu pierwszego typu $F(y, y', y'') = 0$

Podstawiamy $u(y) = y'$.

Podstawiona funkcja jest funkcją zmiennej y.