

Metody rozwiązywania równań różniczkowych

Zagadnienie początkowe Cauchy'ego

Zagadnieniem początkowym Cauchy'ego nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne wraz z podanym warunkiem początkowym. Równanie różniczkowe zwyczajne (pierwszego rzędu) zapisujemy w postaci:

$$y'(x) = f(x, y), \text{ dla } x \in [a, b] \quad (1)$$

gdzie: f – funkcja dwóch zmiennych.

Warunek początkowy jest w postaci:

$$y(a) = y_a \quad (2)$$

Pochodną $y'(x)$ przybliżamy ilorazem różnicowym pierwszego rzędu opartym na węzłach x i $x + h$. Jeśli funkcja y jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i posiada pochodną, to ze wzoru Taylora otrzymamy:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{h}{2} y''(\xi), \text{ gdzie } \xi \in [x, x+h] \quad (3)$$

Krok różniczkowania:

$$h = \frac{b-a}{N} \quad (4)$$

Gdzie: N – liczba kroków.

Dla małych wartości h równanie (3) można uprościć do postaci:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad (5)$$

Podstawiając wzór (5) do (1) otrzymujemy:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = f(x, y) \quad (6)$$

Lub:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y_i) \quad (7)$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + hf(x_i, y_i) \\ x_i &= a + ih \end{aligned} \quad (8)$$

Przykład zagadnienia Cauchy'ego:

$$y'(x) = 2x + y(x) + 3, \text{ dla } 0 \leq x \leq 3$$

$$y(0) = 0$$

Zatem mamy dane:

1. Funkcję $f(x, y)$, w tym przypadku $f(x, y) = 2x + y(x) + 3$
2. Warunek początkowy: $y(0) = 0$

1) Metoda Eulera

W metodzie Eulera schemat metody dany jest wzorem:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (9)$$

Przykład

Dane jest zagadnienie Cauchy'ego:

$$y'(x) = x^2 + y \quad (10)$$

$$y(0) = 0.1 \quad (11)$$

Oblicz wartość rozwiązania w punkcie $x = 0.3$ dla $N = 3$ dla $x \in [0, 0.3]$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy wartość w punkcie $x = 0.3$ dla $N = 3$ zatem $h = \frac{0.3-0}{3} = 0.1$

Kolejne kroki obliczeń:

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0.1 + 0.1(0^2 + 0.1) = 0.11$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0.11 + 0.1(0.1^2 + 0.11) = 0.122$$

$$x_3 = x_2 + h = 0.3$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 0.122 + 0.1(0.2^2 + 0.122) = 0.1382$$

Rozwiązaniem zatem jest:

$$y(0.3) = 0.1382$$

2) Metoda Rungego-Kutty (ogólny wzór):

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + h\phi(x_i, y_i, h) \\ y(a) &= y_a\end{aligned}\tag{12}$$

Metoda Rungego-Kutty drugiego rzędu (RK2):

$$\begin{aligned}\phi(x, y, h) &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &= f(x, y) \\ k_2 &= f(x + h, y + hk_1)\end{aligned}\tag{13}$$

Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4):

$$\begin{aligned}\phi(x, y, h) &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(x, y) \\ k_2 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(x + h, y + hk_3)\end{aligned}\tag{14}$$

Zadanie

Napisz program, który rozwiąże dowolne zagadnienie Cauchy'ego z dowolnym warunkiem początkowym. Równanie różniczkowe (czyli tak naprawdę funkcję $f(x,y)$) należy zaimplementować jako odrębną funkcję. Program powinien wyświetlić w konsoli:

1. Warunek początkowy
2. Punkt końcowy
3. Krok obliczeń
4. Rozwiązanie metodą Eulera w punkcie końcowym
5. Rozwiązanie metodą RK2 w punkcie końcowym
6. Rozwiązanie metodą RK4 w punkcie końcowym

Wyznacz rozwiązanie w punkcie $x = 1$ dla $N = 10$ dla następujących równań:

$$y'(x) = x^2 + y, y(0) = 0.1$$

$$y'(x) = x + y, y(0) = 0.1$$

Przeprowadź badanie zbieżności zaimplementowanych metod (w zależności od N – zrobić wykres). Uzyskane wyniki porównaj z wynikiem dokładnym.

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-11 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-11).