Metoda eliminacji Gaussa jest
ostatnia dobrze chyba

Metoda eliminacji Gaussa jest:

Wybierz jedną odpowiedź:

○
- metodą rozwiązywania dowolnych układów równań
- po przekształceniach otrzymujemy macierz trójkątną górną, a składowe wektora rozwiązania otrzymujemy z reguły rekurencyjnej
- jest metodą przybliżoną

○
- metodą rozwiązywania liniowych układów równań
- po przekształceniach otrzymujemy macierz trójkątną dolną, a składowe wektora rozwiązania otrzymujemy z reguły rekurencyjnej
- jest metodą przybliżoną

○
- metodą rozwiązywania układów równań różniczkowych
- po przekształceniach otrzymujemy macierz trójkątną górną, a składowe rozwiązania otrzymujemy z reguły rekurencyjnej
- jest metodą dokładną

◉
- metodą rozwiązywania liniowych układów równań
- po przekształceniach otrzymujemy macierz trójkątną górną, a składowe wektora rozwiązania otrzymujemy z reguły rekurencyjnej
- jest metodą dokładną

Ostatnia odp

Dane jest równanie postaci:

Dane jest równanie postaci:

$f(x) = 0$

Metoda siecznych iteracyjnego rozwiązywania równania $f(x) = 0$ konstruuje kolejne przybliżenia pierwiastka wg reguły postaci:

Wybierz jedną odpowiedź:

$$x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_i)}$$

Metoda jest zawsze zbieżna dla funkcji wypukłych i monotonicznych.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f\left(x_{i-1}\right)$$

Metoda nie zawsze jest zbieżna.

$$x_{i+1} = x_{i-1} - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f\left(x_i\right)$$

Metoda jest zawsze zbieżna.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_i)}$$

Metoda jest zawsze zbieżna dla funkcji monotonicznych.

B

Kwadratury. Reguła Simpsona jest:

Kwadratury. Reguła Simpsona jest:

Wybierz jedną odpowiedź:

- kwadraturą Newtona-Cotesa postaci: $Q(f) = I(L_1) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$

- kwadraturą interpolacyjną postaci: $Q(f) = I(L_3) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$

- kwadraturą aproksymacyjną postaci: $Q(f) = I(W_2) = \frac{b-a}{4}\left(f(a) + 2f(\frac{a+b}{6}) + f(b)\right)$

- kwadraturą Newtona-Cotesa postaci: $Q(f) = I(L_2) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$

D

Kwadratury. Metoda trapezów jest zdefiniowana

Kwadratury. Metoda trapezów jest zdefiniowana następująco:

Wybierz jedną odpowiedź:

- Funkcję f przybliżamy wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a drugiego stopnia opartym na węzłach a i b:

  $f(x) \approx L_1(x) = f(b)\frac{x-b}{a-b} + f(a)\frac{x-a}{b-a}$

  Całkując wielomian L_1 otrzymujemy kwadraturę

  $$Q(f) := I(L_1) = \int_a^b \left(f(b)\frac{x-b}{a-b} + f(a)\frac{x-a}{b-a} \right) dx$$
  $$= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)$$

- Funkcję f przybliżamy wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a opartym na węzłach a i b:

  $f(x) \approx L_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$

  Całkując wielomian L_1 otrzymujemy kwadraturę

  $$Q(f) := I(L_1) = \int_a^b \left(f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} \right) dx$$
  $$= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)$$

- Funkcję f aproksymujemy wielomianem pierwszego stopnia opartym na węzłach a i b:

  $f(x) \approx W_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$

  Różniczkując wielomian W_1 otrzymujemy kwadraturę

  $$Q(f) := I(W_1) = \int_a^b \left(f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} \right) dx$$
  $$= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)$$

- Funkcję f przybliżamy wielomianem pierwszego stopnia w sensie aproksymacji średniokwadratowej opartym na węzłach a i b:

  $f(x) \approx W_1(x) = f(a/2)\frac{x-b}{a-b} + f(b/2)\frac{x-a}{b-a}$

  Całkując wielomian W_1 otrzymujemy kwadraturę

  $$Q(f) := I(W_1) = \int_b^a \left(f(a)\frac{x-a}{a-b} + f(b)\frac{x-b}{b-a} \right) dx$$
  $$= \frac{b-a}{2} f(b-a) + \frac{b-a}{2} f(a-b)$$

B

Dane jest zagadnienie początkowe

Dane jest zagadnienie początkowe postaci:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

Metod Eulera konstruuje ciąg przybliżeń $\{y_i\}$ wg reguły:

Wybierz jedną odpowiedź:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + y_i + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) & i = 1, \ldots, N-1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = (y_i + y_{i-1})/2 + hf(x_i, y_i) & i = 1, \ldots, N-1 \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + h\Phi_f(x_i, y_i) & i = 0, 1, \ldots \\ y_0 = a(y_a + 1) \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f jest zależnością nieliniową od f.

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) & i = 0, 1, \ldots, N-1 \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

D

Dane jest zagadnienie początkowe

Dane jest zagadnienie początkowe postaci:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

Metoda Huena konstruuje ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ zgodnie ze wzorem:

Wybierz jedną odpowiedź:

○

$y_{i+1} = (y_{i-1} + y_i)/2 + hf(x_i, y_i)$
$y_0 = y_a$

○

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(x_i, y_i))$
$y_0 = y_a$

○

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)))$
$y_0 = y_a$

○

$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$
$y_0 = y_a$

C

Dla funkcji f szukamy n-tego wielomianu aproksymującego

Dla funkcji f szukamy n-tego wielomianu aproksymującego w sensie aproksymacji średniokwadratowej z wagą $p(x) = 1$ na przedziale $[0, 1]$.

Jeżeli bazą podprzestrzeni W_n są wielomiany $1, x, x^2, \ldots, x^n$, to układ równań normalnych ma postać:

Wybierz jedną odpowiedź:

- ○

$$\begin{array}{l} \alpha_0(1,1) + \alpha_1(x,1) + \ldots + \alpha_n(x^n,1) = (f,1) \\ \alpha_0(1,x) + \alpha_1(x,x) + \ldots + \alpha_n(x^n,x) = (f,x) \\ \text{---} \\ \alpha_0(1,x^n) + \alpha_1(x,x^n) + \ldots + \alpha_n(x^n,x^n) = (f,x^n) \end{array}$$

gdzie wyraz macierzy a_{ij} jest równy:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \int_0^1 x^{i-1}x^{j-1}dx = \frac{1}{i+j-1}$$

- ○

$$\begin{array}{l} \alpha_0(1,1) + \alpha_1(x,1) + \ldots + \alpha_n(x^n,1) = (f,x^n) \\ \alpha_0(1,x) + \alpha_1(x,x) + \ldots + \alpha_n(x^n,x) = (f,x^{n-1}) \\ \text{---} \\ \alpha_0(1,x^n) + \alpha_1(x,x^n) + \ldots + \alpha_n(x^n,x^n) = (f,1) \end{array}$$

gdzie wyraz macierzy a_{ij} jest równy:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \int_0^1 x^{i-1}x^{j-1}dx = \frac{1}{i-j-1}$$

- ○

$$\begin{array}{l} \alpha_0(1,1) + \alpha_1(1,1) + \ldots + \alpha_n(1,1) = (f,1) \\ \alpha_0(x,x) + \alpha_1(x,x) + \ldots + \alpha_n(x,x) = (f,x) \\ \text{---} \\ \alpha_0(x^n,x^n) + \alpha_1(x^n,x^n) + \ldots + \alpha_n(x^n,x^n) = (f,x^n) \end{array}$$

gdzie wyraz macierzy a_{ij} jest równy:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \int_0^1 x^{i+1}x^{j+1}dx = \frac{1}{i+j+1}$$

- ○

$$\begin{array}{l} \alpha_0(1,1) + \alpha_1(x,1) + \ldots + \alpha_n(x^n,1) = (f,1) \\ \alpha_0(1,x) + \alpha_1(x,x) + \ldots + \alpha_n(x^n,x) = (f^2,x) \\ \text{---} \\ \alpha_0(1,x^n) + \alpha_1(x,x^n) + \ldots + \alpha_n(x^n,x^n) = (f^n,x^n) \end{array}$$

gdzie wyraz macierzy a_{ij} jest równy:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \sum_{x=0}^{1} x^{i-1}x^{j-1}dx = \frac{1}{i+j-1}$$

Następna strona

A

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na:

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na:

Wybierz jedną odpowiedź:

- znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż n, którego wartości w $n+1$ punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

  $L_n(x_i) = f(x_i) \quad dla\ i = 0, 1, \ldots, n$
  gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

  Zadanie ma jednoznaczne rozwiązanie, które można przedstawić w postaci:
  $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$
  gdzie
  $l_i(x) \stackrel{df}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

- znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu L_n dokładnie stopnia n, którego wartości w $n+1$ punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

  $L_n(x_i) = f(x_i) \quad dla\ i = 0, 1, \ldots, n$
  gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

  Zadanie ma jednoznaczne rozwiązanie, które można przedstawić w postaci:
  $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) / l_i(x)$
  gdzie
  $l_i(x) \stackrel{df}{=} \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

- znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż n, którego wartości w n punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

  $L_n(x_i) = f(x_i) \quad dla\ i = 0, 1, \ldots, n$
  gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

  Zadanie ma jednoznaczne rozwiązanie, które można przedstawić w postaci:
  $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$
  gdzie
  $l_i(x) \stackrel{df}{=} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

- znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż n, którego wartości w n punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

  $L_n(x_i) = f(x_i) \quad dla\ i = 1, \ldots, n$
  gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

  Zadanie ma jednoznaczne rozwiązanie, które można przedstawić w postaci:
  $L_n(x) = \prod_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$
  gdzie
  $l_i(x) \stackrel{df}{=} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

A

Niech będzie funkcjonałem liniowym

Niech $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ będzie funkcjonałem liniowym,

którym jest całka.

Niech $Q(f)$ będzie kwadraturą postaci:

$Q(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

gdzie $A_0, A_1, \ldots, A_n$ są współczynnikami kwadratury Q.

Rząd n kwadratury Q definiujemy następująco:

Wybierz jedną odpowiedź:

- ○ Kwadratura Q jest rzędu n, jeśli jest dokładna dla dokładnie jednego wielomianu stopnia n, $Q(w) = I_p(w)$ dla $w \in W_n$, które jest rozwiązaniem tej kwadratury.
- ○ Kwadratura Q jest rzędu n, jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia mniejszego lub równego n, $Q(w) = I_p(w)$ dla $w \in W_n$ oraz istnieje wielomian stopnia $n+1$, dla którego $Q(w_{n+1}) \neq I_p(w_{n+1})$
- ◉ Kwadratura Q jest rzędu n, jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia mniejszego od n, $Q(w) = I_p(w)$ dla $w \in W_{n-1}$ oraz istnieje wielomian stopnia n, dla którego $Q(w_n) \neq I_p(w_n)$
- ○ Kwadratura Q jest rzędu n, jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia większego od n oraz istnieje wielomian stopnia n, dla którego $Q(w_n) \neq I_p(w_n)$

Odznacz mój wybór

C

aproksymacja średniokwadratowej funkcji

Aproksymacja średniokwadratowej funkcji f wielomianami polega na:

Wybierz jedną odpowiedź:

- Wyznaczeniu elementu optymalnego dla funkcji f względem podprzestrzeni W_n wielomianów stopnia nie wyższego niż n, czyli wielomianu w_n^*, dla którego zachodzi równość:
  $$||f-w_n^*|| = \inf_{w \in W_n} ||f-w||$$
  gdzie:
  $$||f-w|| := \begin{cases} (\int_a^b (f(x)-w(x))p(x)dx) & dla\ L_p^2[a,b] \\ \sum_{i=1}^N (f(x_i)-w(x_i))p(x_i) & dla\ l_{p,N}^2 \end{cases}$$
  Wielomian w_n^* nazywamy n-tym wielomianem optymalnym z funkcją wagową p odpowiednio na przedziale $[a,b]$ lub na zbiorze dyskretnym $x_1, x_2, \ldots, x_N$.
- Wyznaczeniu elementu optymalnego dla funkcji f względem podprzestrzeni W_n wielomianów stopnia nie wyższego niż n, czyli wielomianu w_n^*, dla którego zachodzi równość:
  $$||f-w_n^*|| = \inf_{w \in W_n} ||f-w||$$
  gdzie:
  $$||f-w|| := \begin{cases} (\int_a^b (f(x)-w(x))^2 p(x)dx)^{1/2} & dla\ L_p^2[a,b] \\ \sum_{i=1}^N (f(x_i)-w(x_i))^2 p(x_i) & dla\ l_{p,N}^2 \end{cases}$$
  Wielomian w_n^* nazywamy n-tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji średniokwadratowej z funkcją wagową p odpowiednio na przedziale $[a,b]$ lub na zbiorze dyskretnym $x_1, x_2, \ldots, x_N$.
- Wyznaczeniu elementu optymalnego dla funkcji f względem podprzestrzeni W_n wielomianów stopnia nie wyższego niż n, czyli wielomianu w_n^*, dla którego zachodzi równość:
  $$||f-w_n^*|| = \sup_{w \in W_n} ||f-w||$$
  gdzie:
  $$||f-w|| := \begin{cases} (\int_a^b (f(x)-w(x))^2 p(x)dx)^{1/2} & dla\ l_{p,N} \\ \sum_{i=1}^N (f(x_i)-w(x_i))^2 p(x_i) & dla\ L_p[a,b] \end{cases}$$
  Wielomian w_n^* nazywamy n-tym wielomianem optymalnym z funkcją wagową p odpowiednio na przedziale $[a,b]$ lub na zbiorze dyskretnym $x_1, x_2, \ldots, x_N$.
- Wyznaczeniu elementu optymalnego dla funkcji f z przestrzeni W_n wielomianów dokładnie stopnia n, czyli wielomianu w_n^*, dla którego zachodzi równość:
  $$||f-w_n^*|| = \sup_{w \in W_n} ||f-w||$$
  gdzie:
  $$||f-w|| := \begin{cases} (\int_a^b (f(x)-w(x))^2 p(x)dx)^{1/2} & dla\ L_p^2[a,b] \\ \sum_{i=1}^N (f(x_i)-w(x_i))^2 p(x_i) & dla\ l_{p,N}^2 \end{cases}$$
  Wielomian w_n^* nazywamy n-tym wielomianem optymalnym z funkcją wagową p odpowiednio na przedziale $[a,b]$ lub na zbiorze dyskretnym $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

B

W postaci Newtona wielomianu

W postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$ występują współczynniki b_k, które są równe:

Wybierz jedną odpowiedź:

- ilorazom różnicowym funkcji f opartym na węzłach $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$:
$$b_k = \prod_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)}$$
- ilorazom różnicowym funkcji f opartym na węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_k$:
$$b_k = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\sum\limits_{j=0}^{k} (x_i - x_j)}$$
- ilorazom różnicowym funkcji f opartym na węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_k$:
$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)}$$
- ilorazom różnicowym funkcji f opartym na węzłach $x_1, x_1, \ldots, x_k$:
$$b_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)}$$

C

Poprawnie zdefiniowana postać

Poprawnie zdefiniowana postać wielomianu Newtona to:

Wybierz jedną odpowiedź:

- $w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$

  gdzie:

  $p_0(x) \stackrel{df}{=} b_0$

  $p_k(x) \stackrel{df}{=} b_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_k) \quad dla\ k = n, n-1, \ldots,$

  oraz $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są danymi liczbowymi.

- $w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$

  gdzie:

  $p_0(x) \stackrel{df}{=} x_0$

  $p_k(x) \stackrel{df}{=} (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_k) \quad dla\ k = 1, 2, \ldots, n$

  oraz $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są danymi liczbowymi.

- $w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$

  gdzie:

  $p_0(x) \stackrel{df}{=} 1$

  $p_k(x) \stackrel{df}{=} (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \quad dla\ k = 1, 2, \ldots, n$

  oraz $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są danymi liczbowymi.

- $w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$

  gdzie:

  $p_0(x) \stackrel{df}{=} 1$

  $p_k(x) \stackrel{df}{=} \prod_{k=0}^{n} b_k p_k(x) \quad dla\ k = n, n-1, \ldots, 1$

  oraz $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są danymi liczbowymi.

C

Dane są węzły x0 i x1 (dane z wykładu)

Dane są węzły x_0 i x_1 o krotnościach odpowiednio $m_0 = 3$, $m_1 = 2$.

Dla danej funkcji f szukamy wielomianu interpolacyjnego Hermite'a H_4 takiego, że:

$H_4(x_0) = f(x_0) \qquad H_4'(x_0) = f'(x_0) \qquad H_4''(x_0) = f''(x_0)$

$H_4(x_1) = f(x_1) \qquad H_4'(x_1) = f'(x_1)$

Wielomian H_4 w postaci Newtona ma postać:

Wybierz jedną odpowiedź:

- (wybrana) $H_4(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + b_4(x - x_0)^3(x - x_1)$
  gdzie współczynniki b_i są ilorazami różnicowym:
  $b_0 = f[x_0] = f(x_0) \quad b_1 = f[x_0, 2] = f'(x_0)$
  $b_2 = f[x_0, 3] = f''(x_0)/2! \quad b_3 = f[x_0, 3; x_1] \quad b_4 = f[x_0, 3; x_1, 2]$

- $H_4(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + b_4(x - x_0)^3(x - x_1)^2$
  gdzie współczynniki b_i są ilorazami różnicowym:
  $b_0 = f[x_0] = f(x_0) \quad b_1 = f[x_0, 2] = f'(x_0)$
  $b_2 = f[x_0, 3] = f''(x_0) \quad b_3 = f[x_0, 2; x_1, 1] \quad b_4 = f[x_0, 3; x_1, 2]$

- $H_4(x) = b_0(x - x_0) + b_1(x - x_0)^2 + b_2(x - x_0)^3 + b_3(x - x_0)^3(x - x_1) + b_4(x - x_0)^3(x - x_1)^2$
  gdzie współczynniki b_i są ilorazami różnicowym:
  $b_0 = f[x_0] = f(x_0) \quad b_1 = f[x_0, 2] = f'(x_0)$
  $b_2 = f[x_0, 3] = 2!f''(x_0) \quad b_3 = f[x_0, 3; x_1] \quad b_4 = f[x_0, 3; x_1, 2]$

- $H_4(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + b_4(x - x_0)^3(x - x_1)$
  gdzie współczynniki b_i są ilorazami różnicowym:
  $b_0 = f[x_0] = f(x_0) \quad b_1 = f[x_0, 1] = f^2(x_0)$
  $b_2 = f[x_0, 2] = f'(x_0)/2! \quad b_3 = f[x_0, 3; x_1] \quad b_4 = f[x_0, 3; x_1, 2]$

A

Dane jest zagadnienie początkowej postaci

Dane jest zagadnienie początkowe postaci:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & x \in [a,b] \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu konstruuje ciąg przybliżeń $\{y_i\}$ wg reguły:

Wybierz jedną odpowiedź:

○

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + h\Phi_f(x_i, y_i) \\ y_0 = a(y_a + 1) \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f jest zależnością nieliniową od f.

○

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + y_i + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

○

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h) \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{cases} \Phi(x,y;h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x,y) \\ k_2 = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x + h, y + hk_3) \end{cases}$$

○

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h) \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{cases} \Phi(x,y;h) = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x,y) \\ k_2 = f(x + \frac{1}{3}h, y + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x + \frac{1}{4}h, y + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x + h, y + hk_3) \end{cases}$$

C

Dla wielomianu w postaci

Dla wielomianu w postaci naturalnej

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

obliczanie wartości w punkcie x "najtaniej" obliczeniowo można zrealizować:

Wybierz jedną odpowiedź:

- [x]
  - przy wykorzystaniu schematu Hornera:
    $w_n = a_n$
    $w_i = w_{i+1} \cdot x + a_i \quad dla\ i = n-1, n-2, \ldots, 0$
  - koszt obliczeniowy tego algorytmu jest równy n mnożeń i n dodawań

- [ ]
  - wprost z definicji postaci naturalnej:
    $w_0 = a_0$
    $w_i = w_{i-1} + a_i x^i$
  - koszt obliczeniowy tego algorytmu jest równy n mnożeń i $n+1$ dodawań

- [ ]
  - przy wykorzystaniu schematu Hornera:
    $w_0 = a_0$
    $w_{i+1} = w_i \cdot x + a_{i-1} \quad dla\ i = 1, 2, \ldots, n$
  - koszt obliczeniowy tego algorytmu jest równy n mnożeń i n dodawań

- [ ]
  - wprost z definicji postaci naturalnej:
    $w_0 = a_0$
    $w_i = w_{i-1} + a_i x^i$
  - koszt obliczeniowy tego algorytmu jest równy $n+1$ mnożeń i $n+2$ dodawań

A

Dany jest układ równań liniowych postaci

Dany jest układ równań liniowych postaci:

$Ax = b$

Ogólny schemat metod iteracyjnego rozwiązywania układu $Ax = b$ jest postaci:

Wybierz jedną odpowiedź:

○

- Definiujemy rozkład macierzy $A = N - M$, gdzie N jest macierzą odwracalną
- Układ $Ax = b$ przekształcamy do równoważnego układu postaci:
  $N^{-1}Ax = M^{-1}b$
  i dalej do: $x = N^{-1}(M - A)x + M^{-1}b$
- Z powyższego wynika metoda iteracyjna:
  $x_{i+1} = N^{-1}(M - A)x_i + N^{-1}b$

○

- Definiujemy rozkład macierzy $A = M - N$, gdzie M jest macierzą odwracalną
- Układ $Ax = b$ przekształcamy do równoważnego układu postaci:
  $MAx = Mb$
  i dalej do: $x = M(M^{-1} - A)x + Mb$
- Z powyższego wynika metoda iteracyjna:
  $x_{i+1} = M(M^{-1} - A)x_i + Mb$

◉

- Definiujemy rozkład macierzy $A = M - N$, gdzie M jest macierzą odwracalną
- Układ $Ax = b$ przekształcamy do równoważnego układu postaci:
  $M^{-1}Ax = M^{-1}b$
  i dalej do: $x = M^{-1}(M - A)x + M^{-1}b$
- Z powyższego wynika metoda iteracyjna:
  $x_{i+1} = M^{-1}(M - A)x_i + M^{-1}b$

○

- Definiujemy rozkład macierzy $A = M - N$, gdzie M jest macierzą odwracalną
- Układ $Ax = b$ przekształcamy do równoważnego układu postaci:
  $M^{-1}Ax = M^{-1}b - A$
  i dalej do: $x = M^{-1}(M - A)x + M^{-1}b - A$
- Z powyższego wynika metoda iteracyjna:
  $x_{i+1} = M^{-1}(M - A)x_i + M^{-1}b - A$

Odznacz mój wybór

C

Dane jest równanie postaci:

Dane jest równanie postaci:

$f(x) = 0$

Metoda Newtona-Raphsona iteracyjnego rozwiązywania równania $f(x) = 0$ konstruuje kolejne przybliżenia pierwiastka wg reguły postaci:

Wybierz jedną odpowiedź:

○ $x_{i+1} = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_i)}$

Metoda jest zawsze zbieżna dla funkcji monotonicznych.

○ $x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_i)}$

Metoda jest zawsze zbieżna dla funkcji wypukłych i monotonicznych.

○ $x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f(x_i)}$

Metoda jest zawsze zbieżna.

○ $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Metoda jest zawsze zbieżna dla funkcji wypukłych i monotonicznych.

D

Dane jest zagadnienie początkowe postaci

Dane jest zagadnienie początkowe postaci:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & x \in [a,b] \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

Metody różnicowe jednokrokowe:

Wybierz jedną odpowiedź:

- ○ konstruują ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ zgodnie ze wzorem:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + h\Phi_f(x_i, y_i) & i = 0, 1, \ldots \\ y_0 = a(y_a + 1) \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f jest pewnym wielomianem opartym na wartościach f.

- ○ konstruują ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ zgodnie ze wzorem:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i) & i = 0, 1, \ldots \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f zależy od f zawsze liniowo.

- ◉ konstruują ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ zgodnie ze wzorem:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i) & i = 0, 1, \ldots \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f może zależeć od f nieliniowo.

- ○ konstruują ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ zgodnie ze wzorem:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_{i-1}, y_{i-1}) & i = 0, 1, \ldots \\ y_0 = y_a/2 \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f może zależeć od f nieliniowo.

C

Zadanie wyznaczania wartości wyrażenia

Zadanie wyznaczenia wartości wyrażenia $\sqrt[3]{20}$ przy wykorzystaniu metody Newtona-Raphsona.

Niech $x_0 = 2$.

Wskaż prawidłowy ciąg obliczeń w kolejnych iteracjach.

Wybierz jedną odpowiedź:

- (●)
  $0 : 2$
  $1 : 3$
  $2 : 2.74074$
  $3 : 2.71467$
  $4 : 2.71442$
- ( )
  $0 : 2.0$
  $1 : 2.95302$
  $2 : 2.73318$
  $3 : 2.71455$
  $4 : 2.71442$
- ( )
  $0 : 2$
  $1 : 2.2156$
  $2 : 2.5478$
  $3 : 2.6967$
  $4 : 2.7546$
- ( ) Tego zadania nie można rozwiązać metodą Newtona-Raphsona

Przykład

Za pomocą metody Newtona można obliczyć pierwiastek $\sqrt{a}$ dla zadanej liczby $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{a} = x \iff a = x^2 \iff x^2 - a = 0$$

Funkcja $f(x)$ ma postać:

$$f(x) = x^2 - a$$
$$f'(x) = 2x$$

Rekurencyjny wzór wynosi:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k}$$
$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$$

Dla danych $a = 2$ i $x_0 = 1{,}5$ algorytm przebiega następująco:

$x_0 = 1{,}5$

$$x_1 = \frac{1}{2}(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}) \approx 1{,}416666$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(1{,}416666 + \frac{2}{1{,}416666}) \approx 1{,}414214$$

A

Aproksymacja Pade to aproksymacja funkcjami

Aproksymacja Pade to aproksymacja funkcjami wymiernymi:

$r_{kl}(x) = \frac{p_k(x)}{q_l(x)} = \frac{a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + \ldots + b_1 x + b_0}$

Wskaż prawidłową funkcję wymierną w senie aproksymacji Pade dla funkcji $f(x) = e^x - x^2$ w zerze, jeżeli $k = 1$ oraz $l = 2$

Wybierz jedną odpowiedź:

- Szukana funkcja wymierna jest postaci:

  $r_{12} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$

  Układ równań, który należy rozwiązać, aby wyznaczyć współczynniki funkcji r_{12}, ma postać:

  $1 - a_0 = 0$
  $b_1 + 1 - a_1 = 0$
  $b_2 + b_1 + \frac{1}{2} = 0$
  $b_2 + \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{6} = 0$

  po rozwiązaniu układu otrzymujemy funkcję aproksymacji Pade:

  $r_{12}(x) = \frac{1 + \frac{1}{3} x}{1 - \frac{2}{3} x + \frac{1}{6} x^2}$

- Szukana funkcja wymierna jest postaci:

  $r_{12} = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$

  Układ równań, który należy rozwiązać, aby wyznaczyć współczynniki funkcji r_{12}, ma postać:

  $1 - a_0 = 0$
  $b_1 + 1 - a_1 = 0$
  $b_2 + b_1 - \frac{1}{2} = 0$
  $b_2 - \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{6} = 0$

  po rozwiązaniu układu otrzymujemy funkcję aproksymacji Pade:

  $r_{12}(x) = \frac{1 + 2x}{1 + x - \frac{1}{2} x^2}$

- Szukana funkcja wymierna jest postaci:

  $r_{12} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$

  Układ równań, który należy rozwiązać, aby wyznaczyć współczynniki funkcji r_{12}, ma postać:

  $1 - a_0 = 0$
  $b_1 - a_1 = 0$
  $b_2 + \frac{1}{2} = 0$
  $\frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{6} = 0$

  po rozwiązaniu układu otrzymujemy funkcję aproksymacji Pade:

  $r_{12}(x) = \frac{1 - \frac{1}{3} x}{1 - \frac{1}{3} x - \frac{1}{2} x^2}$

- Szukana funkcja wymierna jest postaci:

  $r_{12} = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$

  Układ równań, który należy rozwiązać, aby wyznaczyć współczynniki funkcji r_{12}, ma postać:

  $1 + a_0 = 0$
  $b_1 + a_1 = 0$
  $b_2 - \frac{1}{2} = 0$
  $\frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{6} = 0$

  po rozwiązaniu układu otrzymujemy funkcję aproksymacji Pade:

  $r_{12}(x) = \frac{1 + \frac{1}{2} x}{1 + \frac{2}{3} x - \frac{1}{2} x^2}$

???

Oblicz wartość poniższej funkcji dla zadanych

Oblicz wartość poniższej funkcji dla zadanych wartości wykorzystując interpolację Lagrange'a wielomianem 2 stopnia:

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

dla $x = 16$.

Wybierz prawidłowe rozwiązanie.

Wybierz jedną odpowiedź:

- [x] $f(x) = 2\frac{1256}{1729}$
- [ ] $f(x) = 2\frac{4}{7}$
- [ ] $f(x) = 2\frac{1156}{1629}$
- [ ] $f(x) = 2\frac{1466}{1729}$

A