

Aproksymacja średniokwadratowej funkcji f wielomianami polega na:

Aproksymacja średniokwadratowej funkcji f wielomianami polega na:

Wybierz jedną odpowiedź:

- Wyznaczeniu elementu optymalnego dla funkcji f względem podprzestrzeni W_n wielomianów stopnia nie wyższego niż n , czyli wielomianu w_n^* , dla którego zachodzi równość:

$$\|f - w_n^*\| = \inf_{w \in W_n} \|f - w\|$$

gdzie:

$$\|f - w\| := \begin{cases} \left(\int_a^b (f(x) - w(x))^2 p(x) dx \right)^{1/2} & \text{dla } L_p^2[a, b] \\ \sum_{i=1}^N (f(x_i) - w(x_i))^2 p(x_i) & \text{dla } l_{p,N}^2 \end{cases}$$

Wielomian w_n^* nazywamy n -tym wielomianem optymalnym z funkcją wagową p odpowiednio na przedziale $[a, b]$ lub na zbiorze dyskretnym x_1, x_2, \dots, x_N .

- Wyznaczeniu elementu optymalnego dla funkcji f względem podprzestrzeni W_n wielomianów stopnia nie wyższego niż n , czyli wielomianu w_n^* , dla którego zachodzi równość:

$$\|f - w_n^*\| = \inf_{w \in W_n} \|f - w\|$$

gdzie:

$$\|f - w\| := \begin{cases} \left(\int_a^b (f(x) - w(x))^2 p(x) dx \right)^{1/2} & \text{dla } L_p^2[a, b] \\ \sum_{i=1}^N (f(x_i) - w(x_i))^2 p(x_i) & \text{dla } l_{p,N}^2 \end{cases}$$

Wielomian w_n^* nazywamy n -tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji średniokwadratowej z funkcją wagową p odpowiednio na przedziale $[a, b]$ lub na zbiorze dyskretnym x_1, x_2, \dots, x_N .

- Wyznaczeniu elementu optymalnego dla funkcji f względem podprzestrzeni W_n wielomianów stopnia nie wyższego niż n , czyli wielomianu w_n^* , dla którego zachodzi równość:

$$\|f - w_n^*\| = \sup_{w \in W_n} \|f - w\|$$

gdzie:

$$\|f - w\| := \begin{cases} \left(\int_a^b (f(x) - w(x))^2 p(x) dx \right)^{1/2} & \text{dla } l_{p,N} \\ \sum_{i=1}^N (f(x_i) - w(x_i))^2 p(x_i) & \text{dla } L_p[a, b] \end{cases}$$

Wielomian w_n^* nazywamy n -tym wielomianem optymalnym z funkcją wagową p odpowiednio na przedziale $[a, b]$ lub na zbiorze dyskretnym x_1, x_2, \dots, x_N .

- Wyznaczeniu elementu optymalnego dla funkcji f z przestrzeni W_n wielomianów dokładnie stopnia n , czyli wielomianu w_n^* , dla którego zachodzi równość:

$$\|f - w_n^*\| = \sup_{w \in W_n} \|f - w\|$$

gdzie:

$$\|f - w\| := \begin{cases} \left(\int_a^b (f(x) - w(x))^2 p(x) dx \right)^{1/2} & \text{dla } L_p^2[a, b] \\ \sum_{i=1}^N (f(x_i) - w(x_i))^2 p(x_i) & \text{dla } l_{p,N}^2 \end{cases}$$

Wielomian w_n^* nazywamy n -tym wielomianem optymalnym z funkcją wagową p odpowiednio na przedziale $[a, b]$ lub na zbiorze dyskretnym x_1, x_2, \dots, x_N .

[Oznacz mój wybór](#)

Dany jest układ równań liniowych postaci: $Ax = b$ Ogólny schemat metod iteracyjnego

Dany jest układ równań liniowych postaci:

$$Ax = b$$

Ogólny schemat metod iteracyjnego rozwiązywania układu $Ax = b$ jest postaci:

Wybierz jedną odpowiedź:



- Definiujemy rozkład macierzy $A = M - N$, gdzie M jest macierzą odwracalną
- Układ $Ax = b$ przekształcamy do równoważnego układu postaci:
 $MAx = Mb$
i dalej do: $x = M(M^{-1} - A)x + Mb$
- Z powyższego wynika metoda iteracyjna:
 $x_{i+1} = M(M^{-1} - A)x_i + Mb$



- Definiujemy rozkład macierzy $A = M - N$, gdzie M jest macierzą odwracalną
- Układ $Ax = b$ przekształcamy do równoważnego układu postaci:
 $M^{-1}Ax = M^{-1}b - A$
i dalej do: $x = M^{-1}(M - A)x + M^{-1}b - A$
- Z powyższego wynika metoda iteracyjna:
 $x_{i+1} = M^{-1}(M - A)x_i + M^{-1}b - A$



- Definiujemy rozkład macierzy $A = M - N$, gdzie M jest macierzą odwracalną
- Układ $Ax = b$ przekształcamy do równoważnego układu postaci:
 $M^{-1}Ax = M^{-1}b$
i dalej do: $x = M^{-1}(M - A)x + M^{-1}b$
- Z powyższego wynika metoda iteracyjna:
 $x_{i+1} = M^{-1}(M - A)x_i + M^{-1}b$



- Definiujemy rozkład macierzy $A = N - M$, gdzie N jest macierzą odwracalną
- Układ $Ax = b$ przekształcamy do równoważnego układu postaci:
 $N^{-1}Ax = M^{-1}b$
i dalej do: $x = N^{-1}(M - A)x + M^{-1}b$
- Z powyższego wynika metoda iteracyjna:
 $x_{i+1} = N^{-1}(M - A)x_i + N^{-1}b$

Dla wielomianu w postaci naturalnej

Dla wielomianu w postaci naturalnej

$$w(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

obliczanie wartości w punkcie x "najtaniej" obliczeniowo można zrealizować:

Wybierz jedną odpowiedź:

- wprost z definicji postaci naturalnej:

$$w_0 = a_0$$

$$w_i = w_{i-1} + a_i x^i$$

- koszt obliczeniowy tego algorytmu jest równy n mnożeń i $n + 1$ dodawań

- przy wykorzystaniu schematu Hornera:

$$w_n = a_n$$

$$w_i = w_{i+1} \cdot x + a_i \quad \text{dla } i = n - 1, n - 2, \dots, 0$$

- koszt obliczeniowy tego algorytmu jest równy n mnożeń i n dodawań

- wprost z definicji postaci naturalnej:

$$w_0 = a_0$$

$$w_i = w_{i-1} + a_i x^i$$

- koszt obliczeniowy tego algorytmu jest równy $n + 1$ mnożeń i $n + 2$ dodawań

- przy wykorzystaniu schematu Hornera:

$$w_0 = a_0$$

$$w_{i+1} = w_i \cdot x + a_{i-1} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

- koszt obliczeniowy tego algorytmu jest równy n mnożeń i n dodawań

Dane są węzły x_0 i x_1 o krotnościach odpowiednio

$m_0 = 3, m_1 = 2$.

Dla danej funkcji f szukamy wielomianu interpolacyjnego Hermite'a H_4 takiego, że:

$$H_4(x_0) = f(x_0) \quad H_4'(x_0) = f'(x_0) \quad H_4''(x_0) = f''(x_0)$$

$$H_4(x_1) = f(x_1) \quad H_4'(x_1) = f'(x_1)$$

Wielomian H_4 w postaci Newtona ma postać:

Wybierz jedną odpowiedź:

$$H_4(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + b_4(x - x_0)^3(x - x_1)$$

gdzie współczynniki b_i są ilorazami różnicowym:

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0) \quad b_1 = f[x_0, 1] = f'(x_0)$$

$$b_2 = f[x_0, 2] = f'(x_0)/2! \quad b_3 = f[x_0, 3; x_1] \quad b_4 = f[x_0, 3; x_1, 2]$$

$$H_4(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + b_4(x - x_0)^3(x - x_1)^2$$

gdzie współczynniki b_i są ilorazami różnicowym:

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0) \quad b_1 = f[x_0, 2] = f'(x_0)$$

$$b_2 = f[x_0, 3] = f''(x_0) \quad b_3 = f[x_0, 2; x_1, 1] \quad b_4 = f[x_0, 3; x_1, 2]$$

$$H_4(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + b_4(x - x_0)^3(x - x_1)$$

gdzie współczynniki b_i są ilorazami różnicowym:

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0) \quad b_1 = f[x_0, 2] = f'(x_0)$$

$$b_2 = f[x_0, 3] = f''(x_0)/2! \quad b_3 = f[x_0, 3; x_1] \quad b_4 = f[x_0, 3; x_1, 2]$$

$$H_4(x) = b_0(x - x_0) + b_1(x - x_0)^2 + b_2(x - x_0)^3 + b_3(x - x_0)^3(x - x_1) + b_4(x - x_0)^3(x - x_1)^2$$

gdzie współczynniki b_i są ilorazami różnicowym:

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0) \quad b_1 = f[x_0, 2] = f'(x_0)$$

$$b_2 = f[x_0, 3] = 2!f''(x_0) \quad b_3 = f[x_0, 3; x_1] \quad b_4 = f[x_0, 3; x_1, 2]$$

Kwadratury. Metoda trapezów jest zdefiniowana

Kwadratury. Metoda trapezów jest zdefiniowana następująco:

Wybierz jedną odpowiedź:

- Funkcję f przybliżamy wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a opartym na węzłach a i b :

$$f(x) \approx L_1(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a}$$

Całkując wielomian L_1 otrzymujemy kwadraturę

$$\begin{aligned} Q(f) &:= I(L_1) = \int_a^b \left(f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a} \right) dx \\ &= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) \end{aligned}$$

- Funkcję f aproksymujemy wielomianem pierwszego stopnia opartym na węzłach a i b :

$$f(x) \approx W_1(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a}$$

Różniczkując wielomian W_1 otrzymujemy kwadraturę

$$\begin{aligned} Q(f) &:= I(W_1) = \int_a^b \left(f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a} \right) dx \\ &= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) \end{aligned}$$

- Funkcję f przybliżamy wielomianem pierwszego stopnia w sensie aproksymacji średniokwadratowej opartym na węzłach a i b :

$$f(x) \approx W_1(x) = f(a/2) \frac{x-b}{a-b} + f(b/2) \frac{x-a}{b-a}$$

Całkując wielomian W_1 otrzymujemy kwadraturę

$$\begin{aligned} Q(f) &:= I(W_1) = \int_b^a \left(f(a) \frac{x-a}{a-b} + f(b) \frac{x-b}{b-a} \right) dx \\ &= \frac{b-a}{2} f(b-a) + \frac{b-a}{2} f(a-b) \end{aligned}$$

- Funkcję f przybliżamy wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a drugiego stopnia opartym na węzłach a i b :

$$f(x) \approx L_1(x) = f(b) \frac{x-b}{a-b} + f(a) \frac{x-a}{b-a}$$

Całkując wielomian L_1 otrzymujemy kwadraturę

$$Q(f) := I(L_1) = \int_a^b \left(f(b) \frac{x-b}{a-b} + f(a) \frac{x-a}{b-a} \right) dx$$

Dane jest zagadnienie początkowe postaci metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu

Dane jest zagadnienie początkowe postaci:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu konstruuje ciąg przybliżeń $\{y_i\}$ wg reguły:

Wybierz jedną odpowiedź:



$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + h\Phi_f(x_i, y_i) \\ y_0 = a(y_a + 1) \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f jest zależnością nieliniową od f .



$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h) \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{cases} \Phi(x, y; h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x, y) \\ k_2 = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x + h, y + hk_3) \end{cases}$$



$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h) \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{cases} \Phi(x, y; h) = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x, y) \\ k_2 = f(x + \frac{1}{3}h, y + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x + \frac{1}{4}h, y + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x + h, y + hk_3) \end{cases}$$



$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + y_i + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

[Odznacz mój wybór](#)

Kwadratury. Reguła Simpsona jest

Kwadratury. Reguła Simpsona jest:

Wybierz jedną odpowiedź:

- kwadraturą aproksymacyjną postaci:

$$Q(f) = I(W_2) = \frac{b-a}{4} \left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

- kwadraturą Newtona-Cotesa postaci:

$$Q(f) = I(L_2) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

- kwadraturą interpolacyjną postaci:

$$Q(f) = I(L_3) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

- kwadraturą Newtona-Cotesa postaci:

$$Q(f) = I(L_1) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

Dla funkcji f szukamy n -tego wielomianu aproksymującego w sensie aproksymacji średniokwadratowej z wagą

Dla funkcji f szukamy n -tego wielomianu aproksymującego w sensie aproksymacji średniokwadratowej z wagą $p(x) = 1$ na przedziale $[0, 1]$.
Jeżeli bazą podprzestrzeni \mathcal{W}_n są wielomiany $1, x, x^2, \dots, x^n$, to układ równań normalnych ma postać:

Wybierz jedną odpowiedź:

$$\begin{aligned} \alpha_0(1, 1) + \alpha_1(x, 1) + \dots + \alpha_n(x^n, 1) &= (f, 1) \\ \alpha_0(1, x) + \alpha_1(x, x) + \dots + \alpha_n(x^n, x) &= (f^2, x) \\ \dots & \\ \alpha_0(1, x^n) + \alpha_1(x, x^n) + \dots + \alpha_n(x^n, x^n) &= (f^n, x^n) \end{aligned}$$

gdzie wyraz macierzy a_{ij} jest równy:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \int_{x=0}^1 x^{i-1} x^{j-1} dx = \frac{1}{i+j-1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0(1, 1) + \alpha_1(1, 1) + \dots + \alpha_n(1, 1) &= (f, 1) \\ \alpha_0(x, x) + \alpha_1(x, x) + \dots + \alpha_n(x, x) &= (f, x) \\ \dots & \\ \alpha_0(x^n, x^n) + \alpha_1(x^n, x^n) + \dots + \alpha_n(x^n, x^n) &= (f, x^n) \end{aligned}$$

gdzie wyraz macierzy a_{ij} jest równy:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \int_0^1 x^{i+1} x^{j+1} dx = \frac{1}{i+j+1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0(1, 1) + \alpha_1(x, 1) + \dots + \alpha_n(x^n, 1) &= (f, x^n) \\ \alpha_0(1, x) + \alpha_1(x, x) + \dots + \alpha_n(x^n, x) &= (f, x^{n-1}) \\ \dots & \\ \alpha_0(1, x^n) + \alpha_1(x, x^n) + \dots + \alpha_n(x^n, x^n) &= (f, 1) \end{aligned}$$

gdzie wyraz macierzy a_{ij} jest równy:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} dx = \frac{1}{i-j-1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0(1, 1) + \alpha_1(x, 1) + \dots + \alpha_n(x^n, 1) &= (f, 1) \\ \alpha_0(1, x) + \alpha_1(x, x) + \dots + \alpha_n(x^n, x) &= (f, x) \\ \dots & \\ \alpha_0(1, x^n) + \alpha_1(x, x^n) + \dots + \alpha_n(x^n, x^n) &= (f, x^n) \end{aligned}$$

gdzie wyraz macierzy a_{ij} jest równy:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} dx = \frac{1}{i+j-1}$$

Dane jest zagadnienie początkowe postaci

Dane jest zagadnienie początkowe postaci:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

Metody różnicowe jednokrokowe:

Wybierz jedną odpowiedź:

- konstruuja ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ zgodnie ze wzorem:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + h\Phi_f(x_i, y_i) & i = 0, 1, \dots \\ y_0 = a(y_a + 1) \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f jest pewnym wielomianem opartym na wartościach f .

- konstruuja ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ zgodnie ze wzorem:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i) & i = 0, 1, \dots \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f zależy od f zawsze liniowo.

- konstruuja ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ zgodnie ze wzorem:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i) & i = 0, 1, \dots \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f może zależeć od f nieliniowo.

- konstruuja ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ zgodnie ze wzorem:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_{i-1}, y_{i-1}) & i = 0, 1, \dots \\ y_0 = y_a/2 \end{cases}$$

gdzie funkcja Φ_f może zależeć od f nieliniowo.

Dane jest równanie postaci Metoda siecznych iteracyjnego rozwiązania równania

Dane jest równanie postaci:

$$f(x) = 0$$

Metoda siecznych iteracyjnego rozwiązywania równania $f(x) = 0$ konstruuje kolejne przybliżenia pierwiastka wg reguły postaci:

Wybierz jedną odpowiedź:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_i)}$$

Metoda jest zawsze zbieżna dla funkcji monotonicznych.

$$x_{i+1} = x_{i-1} - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)$$

Metoda jest zawsze zbieżna.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_{i-1})$$

Metoda nie zawsze jest zbieżna.

$$x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_i)}$$

Metoda jest zawsze zbieżna dla funkcji wypukłych i monotonicznych.

Zadanie wyznaczenia wartości wyrażenia przy wykorzystaniu metody Newtona-Raphsona

Zadanie wyznaczenia wartości wyrażenia $\sqrt[3]{20}$ przy wykorzystaniu metody Newtona-Raphsona.

Niech $x_0 = 2$.

Wskaż prawidłowy ciąg obliczeń w kolejnych iteracjach.

Wybierz jedną odpowiedź:

0 : 2

1 : 3

2 : 2.74074

3 : 2.71467

4 : 2.71442

0 : 2.0

1 : 2.95302

2 : 2.73318

3 : 2.71455

4 : 2.71442

0 : 2

1 : 2.2156

2 : 2.5478

3 : 2.6967

4 : 2.7546

Tego zadania nie można rozwiązać metodą Newtona-Raphsona

Aproksymacja Pade to aproksymacja funkcjami wymiernymi

Aproksymacja Pade to aproksymacja funkcjami wymiernymi:

$$r_{kl}(x) = \frac{p_l(x)}{q_k(x)} = \frac{a_l x^l + \dots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0}$$

Wskaż prawidłową funkcję wymierną w sensie aproksymacji Pade dla funkcji $f(x) = e^x - x^2$ w zerze, jeżeli $k = 1$ oraz $l = 2$

Wybierz jedną odpowiedź:

- Szukana funkcja wymierna jest postaci:

$$r_{12} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Układ równań, który należy rozwiązać, aby wyznaczyć współczynniki funkcji r_{12} , ma postać:

$$\begin{aligned}1 - a_0 &= 0 \\ b_1 + 1 - a_1 &= 0 \\ b_2 + b_1 + \frac{1}{2} &= 0 \\ b_2 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6} &= 0\end{aligned}$$

po rozwiązaniu układu otrzymujemy funkcję aproksymacji Pade:

$$r_{12}(x) = \frac{1 + \frac{1}{3}x}{1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2}$$

- Szukana funkcja wymierna jest postaci:

$$r_{12} = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Układ równań, który należy rozwiązać, aby wyznaczyć współczynniki funkcji r_{12} , ma postać:

$$\begin{aligned}1 - a_0 &= 0 \\ b_1 + 1 - a_1 &= 0 \\ b_2 + b_1 - \frac{1}{2} &= 0 \\ b_2 - \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6} &= 0\end{aligned}$$

po rozwiązaniu układu otrzymujemy funkcję aproksymacji Pade:

$$r_{12}(x) = \frac{1 + 2x}{1 + x - \frac{1}{2}x^2}$$

- Szukana funkcja wymierna jest postaci:

$$r_{12} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Układ równań, który należy rozwiązać, aby wyznaczyć współczynniki funkcji r_{12} , ma postać:

$$\begin{aligned}1 - a_0 &= 0 \\ b_1 - a_1 &= 0 \\ b_2 + \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6} &= 0\end{aligned}$$

po rozwiązaniu układu otrzymujemy funkcję aproksymacji Pade:

$$r_{12}(x) = \frac{1 - \frac{1}{3}x}{1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2}$$

- Szukana funkcja wymierna jest postaci:

$$r_{12} = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Układ równań, który należy rozwiązać, aby wyznaczyć współczynniki funkcji r_{12} , ma postać:

$$\begin{aligned}1 + a_0 &= 0 \\ b_1 + a_1 &= 0 \\ b_2 - \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{6} &= 0\end{aligned}$$

po rozwiązaniu układu otrzymujemy funkcję aproksymacji Pade:

$$r_{12}(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2}$$

Oblicz wartość poniższej funkcji dla zadanych wartości wykorzystując interpolację Lagrange'a wielomianem 2 stopnia

Oblicz wartość poniższej funkcji dla zadanych wartości wykorzystując interpolację Lagrange'a wielomianem 2 stopnia:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

dla $x = 16$.

Wybierz prawidłowe rozwiązanie.

Wybierz jedną odpowiedź:



$$f(x) = 2\frac{1256}{1729}$$



$$f(x) = 2\frac{4}{7}$$



$$f(x) = 2\frac{1156}{1629}$$



$$f(x) = 2\frac{1466}{1729}$$

Interpolacja - poszukiwane są wartości pomiędzy zadanymi węzłami

- [Interpolacja Lagrange'a](#)
- [Interpolacja Hermite'a](#)
- Interpolacja trygonometryczna
- Interpolacja funkcjami sklejanymi

Aproksymacja - przybliżenie funkcji

- Przestrzeń unitarna
- [Algorytmy ortogonalizacyjne](#)
- [Aproksymacja średniokwadratowa](#)
- Aproksymacja jednostajna
- [Aproksymacja Padego](#)

Kwadratury -

- [Kwadratura liniowa](#)
- [Kwadratura Newtona – Cotesa](#)
-
- obliczanie całki

Równanie różniczkowe zwyczajne

Układy równań liniowych

Metody rozwiązywania równań nieliniowych

Interpolacja

[#Obliczanie miejsc zerowych](#)

Interpolacja Lagrange'a

2015 gr A zad1

1. SFORMUŁUJ ZASADĘ INTERPOLACJI LAGRANGE

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż n , którego wartości w $n + 1$ punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n$$

gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma jednoznaczne rozwiązanie, które można przedstawić w postaci:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)$$

gdzie

$$l_i(x) \stackrel{df}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

l_i to wielomiany stopnia n takie, że

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

1. JAK MOŻNA OSZACOWAĆ BŁĄD INTERPOLACJI? PODAJ SENSOWNE TWIERDZENIE

- Reszta interpolacyjna r to

$$r(x) = f(x) - L_n(x)$$

- dokładna wartość funkcji f w punkcie x nie jest znana, dlatego korzystamy z twierdzenia
Istnieje punkt $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ taki, że

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} p_{n+1}(x)$$

przy czym zakładamy, że f ma ciągłą pochodną $(n+1)$. rzędu na przedziale $[a, b]$ zawierającym punkty x_0, x_1, \dots, x_n oraz x

2. OBLICZ BŁĄD POWSTAŁY PRZY OBLICZENIU PIERWIĄSKÓW Z LICZBY 7 PRZY WĘZŁACH W PUNKTACH 1, 4, 9

$$r(7) = \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{3!} (7-1) \cdot (7-4) \cdot (7-9) = \frac{\sqrt[3]{f(x)}}{6} (-36) = -6 \sqrt[3]{f(x)}$$

2015 gr B zad1

1. Sformułuj zadanie interpolacji Lagrange'a dla węzłów równoodległych.

Często węzły interpolacyjne są równoodległe (i rzeczywiste):

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n$$

gdzie h to stała długość kroku. Wielomian Lagrange'a ma teraz postać:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-j}{i-j}$$

2. Zdefiniuj postać Newtona wielomianu dowolnego stopnia dla dowolnych węzłów:

$$w(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$$

gdzie

$$p_0(x) \stackrel{df}{=} 1$$

$$p_k(x) \stackrel{df}{=} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n$$

a x_0, x_1, \dots, x_n są danymi liczbowymi.

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)}$$

Współczynniki b_k to ilorazy różnicowe funkcji f oparte na węzłach x_0, x_1, \dots, x_k .

Interpolacja Hermite'a

T1 2015 gr a zad1

1. Sformułuj zadanie interpolacji Hermite'a

Danych jest $k + 1$ różnych węzłów x_0, x_1, \dots, x_k oraz liczby naturalne m_0, m_1, \dots, m_k takie, że $\sum_{i=0}^k m_i = n + 1$. Zadanie interpolacyjne Hermite'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu H_n stopnia nie wyższego niż n , spełniającego warunki:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

2. Znajdź wielomian interpolacyjny Hermite'a w postaci Newtona

ROZWIĄZANIE:

$$H_4(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + b_3(x-x_0)^3 + b_4(x-x_0)^3(x-x_1)$$

x	f(x _{0,2})	
2	—	
2	f[x _{0,2}] = f'(x ₀) = 2	
2	f[x _{0,2}] = f'(x ₀) = 2	f[x _{0,3}] = $\frac{f''(x_0)}{2!} = 0$
3	f[x _{0, x₁] = $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0$}	f[x _{0,2, x₁] = $\frac{f[x_{0, x_1}] - f[x_{0,2}]}{x_1 - x_0} = -2$}
3	f[x _{1,2}] = f'(x ₁) = 2	f[x _{0, x_{1,2}] = $\frac{f[x_{1,2}] - f[x_{0, x_1}]}{x_1 - x_0} = 2$}

$$f[x_{0,3, x_1}] = \frac{-2 - 0}{2 - 2} = \text{nieok.} \quad -2$$

$$f[x_{0,2, x_1,2}] = \frac{f[x_{0, x_1,2}] - f[x_{0,2, x_1}]}{x_1 - x_0} = 4 \quad f[x_{0,3, x_1,2}] = \frac{f[x_{0,2, x_1,2}] - f[x_{0,3, x_1}]}{x_1 - x_0} = 6$$

$$H_4 = 1 + 2(x-2) + 0 \cdot (x-x_0)^2 + \dots$$

ROZWIĄZANIE:

~~$$H(x) = 1 + 2(x-2) + \dots + 4(x-2)^3(x-3)$$~~

b₀: b₀ = f[x₀] = 1

b₁ = f[x_{0,2}] = 2

b₂ = f[x_{0,3}] = 0

b₃ = f[x_{0,3, x₁] = ~~nieok.~~ = 0? -2}

b₄ = f[x_{0,3, x_{1,2}] = 6}

$$H(x) = 1 + 2(x-2) - 2(x-2)^3 + 6(x-2)^3(x-3)$$

1. Interpolacja Hermite'a – definicja ilorazu różnicowego i przykład z wielomianem w postaci Newtona

Danych jest $k + 1$ różnych węzłów

$$x_0, x_1, \dots, x_k$$

oraz liczby naturalne

$$m_0, m_1, \dots, m_k \text{ takie, że } \sum_{i=0}^k m_i = n + 1.$$

Zadanie interpolacyjne Hermite'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu H_n stopnia nie wyższego niż n , spełniającego warunki:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

Ilorazy różnicowe def.

Definicja. Ilorazy różnicowe funkcji f oparte na wielokrotnych węzłach definiujemy jako zależności:

- dla i -krotnego węzła x_l

$$f[x_l, i] = \frac{f^{(i-1)}(x_l)}{(i-1)!}$$

- dla różnych węzłów $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}$ o krotnościach odpowiednio $i_l, i_{l+1}, \dots, i_{l+k}$

$$f[x_l, i_l; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k}] = \frac{(f[x_l, i_l - 1; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k}] - f[x_l, i_l; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k} - 1])}{(x_{l+k} - x_l)}$$

Zakładamy, że istnieją pochodne $f^{(j)}(x_{i+m})$ dla $m = 0, 1, \dots, k$,
 $j = 0, 1, \dots, i_{l+m} - 1$.

Przykład.

Dane są węzły x_0 i x_1 o krotnościach odpowiednio $m_0 = 3$, $m_1 = 2$. Dla danej funkcji f szukamy wielomianu interpolacyjnego Hermite'a H_4 takiego, że:

$$\begin{aligned}
 H_4(x_0) &= f(x_0) & H'_4(x_0) &= f'(x_0) & H''_4(x_0) &= f''(x_0) \\
 H_4(x_1) &= f(x_1) & H'_4(x_1) &= f'(x_1) & &
 \end{aligned}$$

Wielomian H_4 można zapisać w postaci Newtona:

$$H_4(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + b_3(x-x_0)^3 + b_4(x-x_0)^3(x-x_1)$$

Współczynniki b_i są odpowiednimi ilorazami różnicowymi leżącymi na przekątnej, np.

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0), \quad b_3 = f[x_0, 3; x_1]$$

Tablica ilorazów różnicowych dla omawianego przykładu ma postać

x_0	$f(x_0)$				
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0, 2] = f'(x_0)$			
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0, 2] = f'(x_0)$	$f[x_0, 3] = \frac{f''(x_0)}{2!}$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, 2; x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, 2]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, 3; x_1]$	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1, 2] = f'(x_1)$	$f[x_0; x_1, 2] = \frac{f[x_1, 2] - f[x_0, x_1]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, 2; x_1, 2] = \frac{f[x_0; x_1, 2] - f[x_0, 2; x_1]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, 3; x_1, 2] = \frac{f[x_0, 2; x_1, 2] - f[x_0, 3; x_1]}{x_1 - x_0}$

Aproksymacja Padego

T2 2018 gB

Zad1

1. Podaj definicje aproksymacji Pade

$$r_{kl}(x) = \frac{p_k(x)}{q_l(x)} = \frac{a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + \dots + b_1 x + b_0} \quad (17)$$

Przybliżeniami Padego funkcji f są nazywane funkcje wymierne (17) tak konstruowane, aby przy danych k i l , w punkcie $x = 0$ wartości funkcji f i r_{kl} oraz możliwie wielu ich pochodnych były równe.

2. Wyznacz aproksymacje Pade $r_{1,3}$

2) Wyznacz aproksymację Pade $r_{1,3}$:

$$r_{1,3} = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$

dla funkcji $f(x) = x^2 + e^x$ w punkcie $x = 0$.

$$r_{13} = \frac{a_0 + d_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$k=1$$

$$l=3$$

liczymy do 4-jej pochodnej

$$\text{bo } k+l=4$$

$$f(x) = x^2 + e^x$$

$$f'(x) = 2x + e^x$$

$$f''(x) = 2 + e^x$$

$$f'''(x) = e^x$$

$$f^{(4)}(x) = e^x$$

dla $x=0$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 3$$

$$f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(0) = 1$$

$$c_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

$$c_0 = 1 \quad c_1 = 1 \quad c_2 = \frac{3}{2} \quad c_3 = \frac{1}{6} \quad c_4 = \frac{1}{24}$$

$$b_0 = 1$$

$$a_i = 0 \text{ dla } i > k$$

$$b_i = 0 \text{ dla } i > l$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{i=0}^k b_i x^i \right) - \left(\sum_{i=0}^k a_i x^i \right) = \left(\sum_{i=lk+1}^{\infty} d_i x^i \right)$$

$$d_0 x^0 = 1x^0 - b_0 x^0 - a_0 x^0$$

$$\bullet d_0 = 1 - a_0$$

$$d_1 x + d_0 = (1+x)(b_0 + b_1 x) - a_0 - a_1 x$$

$$d_1 x + 1 - a_0 = 1 + b_1 x + x + b_1 x^2 - a_0 - a_1 x$$

- $d_1 = b_1 + 1 - a_1$

Od teraz wszystkie a_0 i a_1 będą się skracać a pozostałe $a_i \neq 0$, więc pomijam

$$d_2 x^2 + d_1 x + d_0 = (1 + x + \frac{3}{2} x^2)(1 + b_1 x + b_2 x^2)$$

$$d_2 x^2 + b_1 x + 1 = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} b_1 x^3 + 3 b_2 x^4$$

Współczynniki gdzie zostanie jakieś wyrażenie z "x" po podzieleniu obu stronnie przez x^i , wyznaczamy to wyrażenie

- $d_2 = b_2 + b_1 + \frac{3}{2}$

$$d_3 x^3 + d_2 x^2 + d_1 x + d_0 = (1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3)(1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$$

$$d_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x^2 + 3 x^2 + b_1 x + x + 1 =$$

$$= 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + b_3 x^4 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} b_1 x^3 + \frac{3}{2} b_2 x^4 + \frac{3}{2} b_3 x^5 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{6} b_1 x^4 + \frac{1}{6} b_2 x^5 + \frac{1}{6} b_3 x^6$$

- $d_3 = b_3 + b_2 + \frac{3}{2} b_1 + \frac{1}{6}$

Od teraz b_n i wyżej $= 0$ bo $i = 4 > 3$ więc pomijam

$$d_4 x^4 + d_3 x^3 + d_2 x^2 + d_1 x + d_0 = (1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4)(1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$$

$$d_4 x^4 + b_3 + b_2 + \frac{3}{2} b_1 + \frac{1}{6} + b_2 + b_1 + \frac{3}{2} + b_1 + 1 + 1 =$$

$$= 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + b_3 x^4 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} b_1 x^3 + \frac{3}{2} b_2 x^4 + \frac{3}{2} b_3 x^5 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{6} b_1 x^4 + \frac{1}{6} b_2 x^5 + \frac{1}{6} b_3 x^6 + \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{24} b_1 x^5 + \frac{1}{24} b_2 x^6 + \frac{1}{24} b_3 x^7$$

- $d_4 = b_3 + \frac{3}{2} b_2 + \frac{1}{6} b_1 + \frac{1}{24}$

$$\begin{cases} d_0 = 1 - a_0 = 0 \\ d_1 = b_1 + 1 - a_1 = 0 \\ d_2 = b_2 + b_1 + \frac{3}{2} = 0 \\ d_3 = b_3 + b_2 + \frac{3}{2}b_1 + \frac{1}{6} = 0 \\ d_4 = b_3 + \frac{3}{2}b_2 + \frac{1}{6}b_1 + \frac{1}{24} = 0 \end{cases}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{23}{44}$$

$$b_1 = -\frac{21}{44}$$

$$b_2 = -\frac{45}{74}$$

$$b_3 = \frac{415}{264}$$

obliczone
ręcznie w tradycyjny
sposób oraz
metoda gaussa
i na trzech różnych
kalkulatorach online.

$$r_{1,3} = \frac{1 + \frac{23}{44}x}{1 - \frac{21}{44}x - \frac{45}{44}x^2 + \frac{415}{264}x^3}$$

Układ równań:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1 \\ 0x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 = -3/2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 3/2x_3 + 1x_4 + 1x_5 = -1/6 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1/6x_3 + 3/2x_4 + 1x_5 = -1/24 \end{cases}$$

Wynik:

$$\circ x_1 = 1$$

$$\circ x_2 = \frac{23}{44}$$

$$\circ x_3 = \frac{-21}{44}$$

$$\circ x_4 = \frac{-45}{44}$$

$$\circ x_5 = \frac{415}{264}$$

Aproksymacja średniokwadratowa

1. Zdefiniuj zadanie aproksymacji średniokwadratowej w przestrzeni $L^2_p[a,b]$.
Zadanie aproksymacji średniokwadratowej w przestrzeni $L^2_p[a,b]$ polega na wyznaczeniu takiej funkcji g , która na przedziale $\langle a,b \rangle$ aproksymuje pewną funkcję f najlepiej (tj. z najmniejszym błędem średniokwadratowym) spośród wszystkich funkcji należących do pewnej wybranej podprzestrzeni zbioru funkcji $L^2_p[a,b]$ (np. ze zbioru wielomianów stopnia 1).

$L^2_p[a,b]$ jest to zbiór funkcji mierzalnych na $[a,b]$ i takich, że $\int_a^b f^2(x)p(x)dx < \infty$,
gdzie $p(x)$ to pewna nieujemna, zerująca się na zbiorze miary zero funkcja zwana funkcją wagową, taka, że $\int_a^b p(x)dx < \infty$.

Jeżeli przyjmiemy następującą normę: $\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)p(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$ dla tego zbioru (przestrzeni), to będzie on przestrzenią liniową unormowaną. Naszym zadaniem jest znalezienie funkcji, dla której norma ta przyjmuje najmniejszą wartość.

Algorytmy ortogonalizacyjne

1. Podaj metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta i wykonaj ten algorytm dla bazy $\{1, x, x^2\}$.
W metodzie ortogonalizacji Grama-Schmidta układ ortogonalny definiujemy następująco:

$$g_1 = f_1$$

$$g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(f_i, g_j)}{(g_j, g_j)} g_j \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta dla bazy $\{1, x, x^2\}$
 $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$

$$g_1 = f_1$$

$$g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(f_i, g_j)}{(g_j, g_j)} g_j \quad i = 2, 3, 4, \dots, n$$

$$g_1 = 1$$

$$g_2 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} \cdot 1$$

$$g_3 = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 - \frac{(x^2, g_2)}{(g_2, g_2)} \cdot g_2$$

Kwadratura liniowa

1. Całkowanie numeryczne . Zdefiniuj pojęcie kwadratury liniowej.

Kwadratura liniowa:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n_0} A_{i,0} f(x_{i,0}) + \sum_{i=1}^{n_1} A_{i,1} f'(x_{i,1}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} A_{i,k} f^{(k)}(x_{i,k})$$

$A_{i,j}$ - to współczynniki kwadratury,

$x_{i,j}$ - to węzły kwadratury

Kwadratura Newtona – Cotesa

2. Co to kwadratury Newtona Cotesa ? Jak wygląda ta kwadratura dla $n=2$ dla funkcji f , gdzie n to liczba węzłów

Kwadraturę Newtona-Cotesa przybliżającą $\int_a^b f(x) dx$ jest nazywana kwadratura postaci:

$$Q(f) = I(L_n)$$

gdzie L_n jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji f opartym na równoodległych węzłach $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = a + nh = b$

Dla $n = 2$ węzłami kwadratury są $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$

Obliczamy współczynniki

$$A_0 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)} dt = \frac{b-a}{6}$$

$$A_1 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-0)(t-2)}{(1-0)(2-0)} dt = \frac{4(b-a)}{6}$$

$$A_2 = A_0$$

Otrzymaliśmy kwadraturę Newtona-Cotesa postaci

$$Q(f) = I(L_2) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

która nazywana jest wzorem parabol lub wzorem Simpsona

3. Oblicz metoda z pkt2 całkę z $\sin(x)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

$$Q(f) = \frac{\pi}{12} \cdot \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{12} \cdot (2\sqrt{2} + 1)$$

- Interpolacja trygonometryczna
- Interpolacja funkcjami sklejanymi

Aproksymacja - przybliżenie funkcji

- Przestrzeń unitarna
- Aproksymacja jednostajna

Kwadratury - obliczanie całki

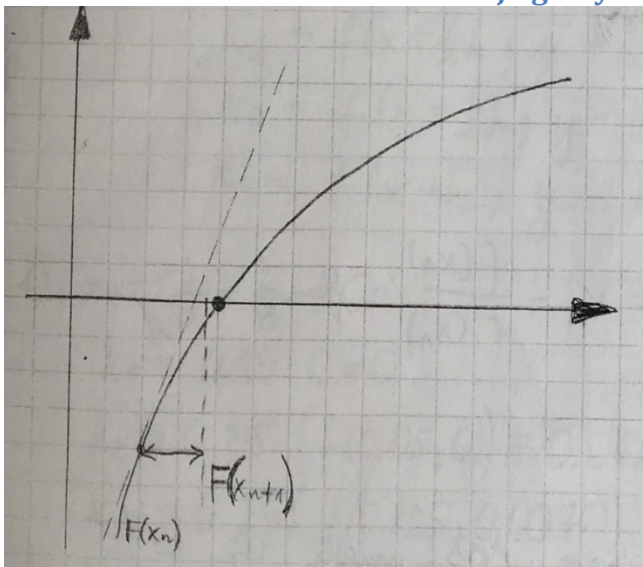
Równanie różniczkowe zwyczajne

Układy równań liniowych

Metody rozwiązywania równań nieliniowych

Obliczanie miejsc zerowych

1. Równania nieliniowe. Podaj ogólny iteracyjny schemat znajdowania zer funkcji



Mamy daną funkcję $f(x)$. Szukamy takiego miejsca żeby $f(x)=0$.

Wybieramy punkt początkowy, obliczamy wartość w tym punkcie $f(x_n)$ a następnie szukamy kolejnego punktu $f(x_{n+1})$, żeby był bliżej miejsca zerowego. W poszukiwaniach tych wykorzystujemy poprzedni punkt

[Zacytuj źródło tutaj.]

Definicja

Ogólny schemat metod iteracyjnego znajdowania zer funkcji

1. Przekształcamy równanie $f(x)=0$ do postaci

$$x=\phi(x)$$

poprzez podstawienie

$$\phi(x)=x-g(x)f(x)$$

gdzie g jest funkcją ciągłą i $g \neq 0$.

Punkt x^* taki, że równanie jest spełnione nazywa się *punktem stałym*. Często postać $x=f(x)$ równania jest jego postacią „naturalną”; wtedy mówimy o metodzie *iteracji prostej* (przykład z mechaniki kwantowej: SCF).

2. Tworzymy ciąg kolejnych przybliżeń $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p)}, \dots$ (w założeniu zbieżny do x^*) taki, że

$$x^{(p+1)}=\phi(x^{(p)})$$

gdzie $x^{(0)}$ jest przybliżeniem początkowym. Taka procedura jest nazywana *procedurą iteracyjną* a funkcja ϕ *funkcją iteracyjną*.

3. Procedurę iteracyjną kończymy jeżeli kolejne przybliżenia x^* różnią się odpowiednio mało (zbieżność) lub wykonaliśmy maksymalną zadaną liczbę kroków (brak zbieżności).

1. Metoda Newtona (Newtona-Raphsona) znajdowania miejsc zerowych - definicja i znaleźć przybliżenie cbrt(9)

METODA NEWTONA (2018 termin 3, zad 3)

Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i posiada pochodną.

Schemat:

1. Wybieramy punkt startowy, zazwyczaj $a, b, 0$ lub 1 .
2. Wyprowadzamy styczną w tym punkcie do funkcji $f(x)$.
Hsopotzedna oduktu punktu precizia stycznej z osia Ox stanowi pierwsze przyblizenie pierwiastka funkcji.
3. Jezeeli przyblizenie to nie jest zadowalajace powtarzamy krok 2.

Wzór rekurencyjny na kolejne przyblizenie:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Przyblizenie $\sqrt[3]{9}$ za pomoca metody Newtona:

$$\sqrt[3]{9} = x \Rightarrow g = x^3 \Rightarrow x^3 - g = 0$$

$$f(x) = x^3 - g$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Zalozaczymy, ze punkt startowy $x_0 = 1$.

$$x_1 = 1 - \frac{1^3 - 9}{3 \cdot 1^2} \cong 3,6667$$

$$x_2 = 3,6667 - \frac{(3,6667)^3 - 9}{3 \cdot (3,6667)^2} \cong 2,6676$$

$$x_3 = 2,6676 - \frac{(2,6676)^3 - 9}{3 \cdot (2,6676)^2} \cong 2,2000$$

$$x_4 = 2,2000 - \frac{(2,2000)^3 - 9}{3 \cdot (2,2000)^2} \cong \underline{\underline{2,0865}}$$

2. Podaj twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania (założenie i tezę)

- Kiedy istnieje jedno rozwiązanie?

Twierdzenie

Jeżeli $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x dla $x \in [a, b]$ i spełnia warunek Lipschitza ze względu na y , tzn. istnieje stała L taka, że dla dowolnych rzeczywistych y_1, y_2 i dla każdego $x \in [a, b]$ jest spełniona nierówność

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (6)$$

to dla każdego skończonego y_a istnieje dokładnie jedna funkcja $y(x)$ ciągła i różniczkowalna na $[a, b]$ taka, że

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{oraz} \quad y(a) = y_a \quad (7)$$

3. Zdefiniuj metodę siecznych, pokaż jej związek z ogólnym schematem z p1



Metoda siecznych

Metoda siecznych

W metodzie Newtona w każdej iteracji musimy obliczyć wartość funkcji i wartość pochodnej. Aby uniknąć obliczania pochodnej możemy wartość pochodnej zastąpić ilorazem różnicowym. Wzór na kolejne przybliżenie wtedy przyjmuje postać:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

4. Za pomocą siecznych rozwiązać równanie $f(x)=x^2-2$

Mamy równanie $f(x) = x^2 - 2$

Wybieramy przedział w którym będziemy szukać miejsca zerowego np. $x_1=0$ i $x_2=2$.

Podstawiamy do wzoru $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$

I tak aż do momentu aż otrzymamy punkt który uznamy za wystarczająco bliski rzeczywistej wartości miejsca zerowego.

Przejdź do 2015 gr A

zad1.1 SFORMUŁUJ ZASADĘ INTERPOLACJI LAGRANGE

zad1.2 JAK MOŻNA OSZACOWAĆ BŁĄD INTERPOLACJI? PODAJ SENSOWNE TWIERDZENIE

zad1.3 OBLICZ BŁĄD POWSTAŁY PRZY OBLICZENIU PIERWIASTKÓW Z LICZBY 7 PRZY WĘZŁACH W PUNKTACH 1, 4, 9

zad2.1 Podaj schemat budowy dowolnej metody iteracyjnej rozwiązywania układów równań liniowych.

zad2.2 Na podstawie schematu z pkt 1 wyprowadź metodę Jacobiego.

zad2.3 Wyznacz macierz Jacobiego i przeprowadź dwa kroki przybliżające rozwiązanie zaczynając od wektora początkowego $\{2, 2, 2\}$ dla układu równań:

zad3.1 Całkowanie numeryczne. Zdefiniuj pojęcie kwadratury liniowej.

zad3.2 Co to kwadratury Newtona Cotesa? Jak wygląda ta kwadratura dla $n=2$ dla funkcji f , gdzie n to liczba węzłów

zad3.3 Oblicz metoda z pkt2 całkę z $\sin(x)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

Przejdź do 2015 gr B

zad1.1 SFORMUŁUJ ZADANIE INTERPOLACJI LAGRANGE DLA WĘZŁÓW RÓWNOODLEGŁYCH

zad 1.2 Zdefiniuj postać Newtona wielomianu dowolnego stopnia dla dowolnych węzłów:

zad1.3 Przedstaw wielomian $W, x=3, x-2, -5x+6$ w postaci Newtona dla punktów 0, 1, 3.

zad2.1 Przedstaw ogólny schemat budowy dowolnej metody iteracyjnej rozwiązywania układów równań liniowych.

zad2.2 Na podstawie schematu z pkt. 1 wyprowadź metodę Gaussa - Seidla.

zad2.3 Wyznacz macierz Gaussa-Seidla i przeprowadź dwa kroki przybliżające rozwiązanie zaczynając od wektora początkowego $[2, 2, 2]$

zad3.1 Całkowanie numeryczne. Zdefiniuj pojęcie kwadratury liniowej.

zad3.2 Co to kwadratury Newtona Cotesa? Jak wygląda ta kwadratura dla $n=2$ dla funkcji f , gdzie n to liczba węzłów

zad3.3 Oblicz metoda z pkt2 całkę z $\sin(x)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

Przejdź do Terminu 1 2015 gr A

zad1.1 Znajdź wielomian interpolacyjny Hermite'a w postaci Newtona

Przejdź do Terminu 2 2018 gr B

zad1.1 Podaj definicje aproksymacji Pade

zad1.2 Wyznacz aproksymacje Pade $r1,3$

zad2.1 Zdefiniuj zadanie aproksymacji średniokwadratowej w przestrzeni $L2p[a,b]$.

zad2.2 Podaj metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta i wykonaj ten algorytm dla bazy $\{1, x, x^2\}$.

zad3.1 Równania nieliniowe. Podaj ogólny iteracyjny schemat znajdowania zer funkcji

zad3.2 Podaj twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania (założenie i tezę)

[zad3.3 Zdefiniuj metodę siecznych, pokaż jej związek z ogólnym schematem z p1](#)

[zad3.4 Za pomocą siecznych rozwiązać równanie \$f\(x\)=x^2-2\$](#)

[Przejdź do Terminu 3 2018](#)

[zad2. Interpolacja Hermite'a – definicja ilorazu różnicowego i przykład z wielomianem w postaci Newtona](#)

[zad3. Metoda Newtona \(Newtona-Raphsona\) znajdowania miejsc zerowych - definicja i znaleźć przybliżenie \$\text{cbrt}\(9\)\$](#)

2015 gr A zad1

1. SFORMUŁUJ ZASADĘ INTERPOLACJI LAGRANGE

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż n , którego wartości w $n + 1$ punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n$$

gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma jednoznaczne rozwiązanie, które można przedstawić w postaci:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

gdzie

$$l_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

l_i to wielomiany stopnia n takie, że

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

2. JAK MOŻNA OSZACOWAĆ BŁĄD INTERPOLACJI? PODAJ SENSOWNE TWIERDZENIE

- Reszta interpolacyjna r to

$$r(x) = f(x) - L_n(x)$$

- dokładna wartość funkcji f w punkcie x nie jest znana, dlatego korzystamy z twierdzenia
Istnieje punkt $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ taki, że

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} p_{n+1}(x)$$

przy czym zakładamy, że f ma ciągłą pochodną $(n+1)$. rzędu na przedziale $[a, b]$ zawierającym punkty x_0, x_1, \dots, x_n oraz x

3. OBLICZ BŁĄD POWSTAŁY PRZY OBLICZENIU PIERWIĄSTKÓW Z LICZBY 7 PRZY WĘZŁACH W PUNKTACH 1, 4, 9

The image shows a handwritten calculation on grid paper. The formula is:
$$r(7) = \frac{\sqrt{\xi(x)}^{(3)}}{3!} (7-1) \cdot (7-4) \cdot (7-9) = \frac{\sqrt{\xi(x)}^{(3)}}{6} (-36) = -6 \sqrt{\xi(x)}^{(3)}$$

Zad2

1. Podaj schemat budowy dowolnej metody iteracyjnej rozwiązywania układów równań liniowych.

Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych polegają na konstruowaniu ciągu przybliżeń wektora rozwiązań $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots$ określonego wzorem:

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + w, \quad i=0, 1, \dots$$

gdzie M jest macierzą kwadratową a "w" jest wektorem.

Ogólny schemat obliczeń iteracyjnych przedstawia metoda iteracji prostych. Za jej pomocą można rozwiązać układ równań liniowych (o n niewiadomych).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Układ ten można zapisać w postaci $Ax=b$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

2. Na podstawie schematu z pkt 1 wyprowadź metodę Jacobiego.

Rozważamy układ $Ax=b$.

Przyjmijmy, że $A=L+D+U$, gdzie:

L-macierz poddiagonalna (trójkątna dolna),

D-macierz diagonalna,

U-macierz naddiagonalna (trójkątna górna)

Układ równań w postaci $Ax=b$ możemy zatem zapisać w postaci:

$$(L+D+U)x=b$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$Dx=-(L+U)x+b.$$

A więc:

$$x=-D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b.$$

Możemy więc skonstruować ciąg przybliżeń rozwiązania w postaci:

$$x_{i+1}=-D^{-1}(L+U)x_i+D^{-1}b.$$

*Macierz D^{-1} powstaje poprzez podniesienie do potęgi -1 wszystkich wartości(elementów) na głównej przekątnej macierzy D.

//tego chyba nie trzeba ale wstawiam tak to:

Przy założeniu, że elementy główne macierzy A są różne od zera (czyli $a_{ii} \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$), należy przekształcić układ w taki sposób, aby wyznaczyć z pierwszego równania x_1 , z drugiego x_2 aż do x_n .

Dostajemy:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{(b_1 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n))}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{(b_2 - (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n))}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{(b_n - (a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}))}{a_{nn}} \end{cases}$$

3. Wyznacz macierz Jacobiego i przeprowadź dwa kroki przybliżające rozwiązanie

zaczynając od wektora początkowego {2.2.2.2} dla układy równań :

- $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9$
- $2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 12$

- $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 15$
- $-3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9$

3) *unlösbar:*

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 15 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

wieder:

$$x^{(i+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(i)} + D^{-1}b$$

$$x^{(1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(0)} + D^{-1}b$$

...

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L+U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(i+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_M x^{(i)} + \underbrace{D^{-1}b}_N \Rightarrow x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + Nb$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot x^0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N \cdot b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,5 \\ -4 \\ 7,5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4,5 \\ -4 \\ 7,5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -4\frac{2}{3} \\ 5,5 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = M \cdot x^{(1)} + N \cdot b$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -4\frac{2}{3} \\ 5\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\frac{1}{2} \\ -4 \\ 7\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{12} \\ \frac{12}{12} \\ -4\frac{2}{3} \\ -2\frac{15}{12} \\ \frac{12}{12} \\ \frac{11}{12} \\ -\frac{11}{12} \end{bmatrix} \stackrel{\text{abgerundet}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} -4\frac{1}{2} \\ -4 \\ 7\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{12} \\ \frac{12}{12} \\ -8\frac{2}{3} \\ \frac{12}{12} \\ \frac{37}{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -4\frac{2}{3} \\ 5\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^\circ 0 \cdot (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot (-4\frac{2}{3}) + \frac{3}{2} \cdot 5\frac{1}{2} + 0 \cdot 9 \\ 2^\circ \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 \cdot (-4\frac{2}{3}) + (-\frac{4}{3}) \cdot 5\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 9 \\ 3^\circ -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot (-4\frac{2}{3}) + 0 \cdot 5\frac{1}{2} + (-\frac{3}{2}) \cdot 9 \\ 4^\circ 3 \cdot (-\frac{1}{2}) + (-1) \cdot (-4\frac{2}{3}) + (-2) \cdot 5\frac{1}{2} + 0 \cdot 9 \end{bmatrix}$$

$$1^\circ 0 + \frac{1}{2} \cdot (-4\frac{2}{3}) + \frac{3}{2} \cdot 5\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{14}{3}) + \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{2} = \frac{-7}{3} + \frac{33}{4} =$$

$$= \frac{-28 + 99}{12} = \frac{71}{12} = 5,91\bar{6}$$

$$2^\circ \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 + (-\frac{4}{3}) \cdot 5\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 9 = -\frac{1}{3} - \frac{22}{3} + 3 = \frac{-23}{3} + \frac{9}{3} =$$

$$= \frac{-14}{3} = -4\frac{2}{3} = -4,66\bar{6}$$

$$3^\circ -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) + (-4\frac{2}{3}) + 0 + (-\frac{3}{2}) \cdot 9 = \frac{1}{4} - \frac{14}{3} - \frac{27}{2} = \frac{3}{12} - \frac{56}{12} - \frac{162}{12} =$$

$$= \frac{-215}{12} = -17,91\bar{6}$$

$$4^\circ -\frac{3}{2} + 4\frac{2}{3} - \frac{22}{2} = \frac{-9}{6} + \frac{28}{6} - \frac{66}{6} = \frac{-47}{6} = -7,83\bar{3}$$

Obliczanie ręcznie (przez kalkulator):

wzrost:

$$\begin{bmatrix} 5,93 \\ -4,66 \\ -17,91 \\ -7,84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{71}{12} \\ -4\frac{2}{3} \\ -\frac{215}{12} \\ -\frac{47}{6} \end{bmatrix}$$

Zad 3

1. Całkowanie numeryczne . Zdefiniuj pojęcie kwadratury liniowej.

Kwadratura liniowa:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n_0} A_{i,0} f(x_{i,0}) + \sum_{i=1}^{n_1} A_{i,1} f'(x_{i,1}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} A_{i,k} f^{(k)}(x_{i,k})$$

$A_{i,j}$ - to współczynniki kwadratury,
 $x_{i,j}$ - to węzły kwadratury

2. Co to kwadratury Newtona Cotesa ? Jak wygląda ta kwadratura dla $n=2$ dla funkcji f , gdzie n to liczba węzłów

Kwadraturą Newtona-Cotesa przybliżającą $\int_a^b f(x) dx$ jest nazywana kwadratura postaci:

$$Q(f) = I(L_n)$$

gdzie L_n jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji f opartym na równoodległych węzłach $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = a + nh = b$

Dla $n = 2$ węzłami kwadratury są $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$
Obliczamy współczynniki

$$A_0 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)} dt = \frac{b-a}{6}$$
$$A_1 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-0)(t-2)}{(1-0)(2-0)} dt = \frac{4(b-a)}{6}$$
$$A_2 = A_0$$

Otrzymaliśmy kwadraturę Newtona-Cotesa postaci

$$Q(f) = I(L_2) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

która nazywana jest wzorem parabol lub wzorem Simpsona

3. Oblicz metoda z pkt2 całkę z $\sin(x)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

$$Q(f) = \frac{\pi}{12} \cdot \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{12} \cdot (2\sqrt{2} + 1)$$

2015 gr B zad1

1. Sformułuj zadanie interpolacji Lagrange'a dla węzłów równoodległych.

Często węzły interpolacyjne są równoodległe (i rzeczywiste):

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n$$

gdzie h to stała długość kroku. Wielomian Lagrange'a ma teraz postać:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-j}{i-j}$$

2. Zdefiniuj postać Newtona wielomianu dowolnego stopnia dla dowolnych węzłów:

$$w(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$$

gdzie

$$p_0(x) \stackrel{df}{=} 1$$

$$p_k(x) \stackrel{df}{=} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n$$

a x_0, x_1, \dots, x_n są danymi liczbowymi.

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)}$$

Współczynniki b_k to ilorazy różnicowe funkcji f oparte na węzłach x_0, x_1, \dots, x_k .

3. Przedstaw wielomian $W(x) = 3x^2 - 5x + 6$ w postaci Newtona dla punktów 0, 1, 3.

Przedstaw wielomian $w(x) = 3x^2 - 5x + 6$ w postaci Newtona dla punktów 0, 1, 3.

$x_0 = 0 \quad f(0) = 6$
 $x_1 = 1 \quad f(1) = 4$
 $x_2 = 3 \quad f(2) = 18$

$P_0(x) = 1$
 $P_1(x) = (x - x_0) = x$
 $P_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x(x - 1)$

$b_0 = w(x_0) = 6$
 $b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{4 - 6}{1 - 0} = -2$
 $b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 4}{3 - 1} = \frac{14}{2} = 7$

$b_2 = \frac{7 - (-2)}{3 - 0} = \frac{9}{3} = 3$

~~$w(x) = 6 - 2x + 3x(x - 1)$~~

WZORY:
 $P_0(x) = 1$
 $P_k(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$

$w(x) = \sum_{k=0}^m b_k P_k(x)$

b_k rekurencyjnie (dla nęci gębsz jednoznaczny)

$b_0 = f(x_0)$
 $b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
 $b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
 \vdots

Zad 2

1. Przedstaw ogólny schemat budowy dowolnej metody iteracyjnej rozwiązywania układów równań liniowych.

Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych polegają na konstruowaniu ciągu przybliżeń wektora rozwiązań określonego wzorem:

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot x^{(k)} \quad \text{gdzie } x(0) \text{ jest dowolny (np. wektor zerowy)}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Ogólny schemat opisuje metoda iteracji prostych, w której równanie

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

można zapisać jako $Ax = b$, gdzie

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

przy założeniu, że $a_{ii} \neq 0$

i biorą się z przekształcenia układu równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

przez podzielenie przez a_{ii} .

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n2}x_2 + \alpha_{n3}x_3 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{cases}$$

gdzie:

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad \text{dla } i \neq j$$

oraz

$$\alpha_{ii} = 0 \quad \text{dla } i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

2. Na podstawie schematu z pkt. 1 wyprowadź metodę Gaussa - Seidla.

W tej metodzie macierz A (z ogólnego schematu) przedstawiamy w postaci $A = L + D + U$,
gdzie:

D - macierz diagonalna (na przekątnej liczby, reszta zera)

L - macierz trójkątna dolna (na dole liczby)

U - macierz trójkątna górna (na górze liczby)

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

do równania $Ax=b$ i otrzymujemy: $(D + L)x = -Ux + b$

Proces iteracyjny :

$$x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}b$$

inaczej:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz iteracji $k = 0, 1, \dots$.

3. Wyznacz macierz Gaussa-Seidla i przeprowadź dwa kroki przybliżające rozwiązanie zaczynając od wektora początkowego $[2,2,2,2]$

$$x^0 = [2, 2, 2, 2]$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_2 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 15 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

Zapisujemy w postaci $Ax=b$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$A=L+D+U$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczymy $D+L$

$$D+L = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (D+L)^{-1} = ((D+L)^D)^T \cdot \frac{1}{\det(D+L)}$$

~~2+18+6~~ ~~4+2~~ 2+4 12

$$\det(D+L) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 12 + 0 + 0 - (0) = 12$$

$$\begin{aligned} ((D+L)^D)^T &= \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -4 & -1 & -12 \\ 0 & -4 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 6 & 0 \\ -12 & 12 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ \frac{15}{12} \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} -8,5 \\ -12,99 \\ 0,25 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{ok}$$

$$X^2 = -(D+L)^{-1} \cdot U \cdot X^1 + (D+L)^{-1} \cdot b$$

X^2 = analogicznie, najlepiej przez kalkulator

nie wiem czy to to jest macierz Gaussa Seidla

$$(D+L)^{-1} \cdot b = (D+L)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,5 \\ -12,99 \\ -7 \\ \frac{15}{12} \\ -3 \end{bmatrix}$$

Zad3

1. Całkowanie numeryczne . Zdefiniuj pojęcie kwadratury liniowej.

Kwadratura liniowa:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n_0} A_{i,0} f(x_{i,0}) + \sum_{i=1}^{n_1} A_{i,1} f'(x_{i,1}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} A_{i,k} f^{(k)}(x_{i,k})$$

$A_{i,j}$ - to współczynniki kwadratury,

$x_{i,j}$ - to węzły kwadratury

2. Co to kwadratury Newtona Cotesa ? Jak wygląda ta kwadratura dla $n=2$ dla funkcji f , gdzie n to liczba węzłów

Kwadraturą Newtona-Cotesa przybliżającą $\int_a^b f(x) dx$ jest nazywana kwadratura postaci:

$$Q(f) = I(L_n)$$

gdzie L_n jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji f opartym na równoodległych węzłach $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = a + nh = b$

Dla $n = 2$ węzłami kwadratury są $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$

Obliczamy współczynniki

$$A_0 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)} dt = \frac{b-a}{6}$$

$$A_1 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-0)(t-2)}{(1-0)(2-0)} dt = \frac{4(b-a)}{6}$$

$$A_2 = A_0$$

Otrzymaliśmy kwadraturę Newtona-Cotesa postaci

$$Q(f) = I(L_2) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

która nazywana jest wzorem parabol lub wzorem Simpsona

3. Oblicz metoda z pkt2 całkę z $\sin(x)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

$$Q(f) = \frac{\pi}{12} \cdot \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{12} \cdot (2\sqrt{2} + 1)$$

T1 2015 gr a zad1

1. Sformułuj zadanie interpolacji Hermite'a

Danych jest $k + 1$ różnych węzłów x_0, x_1, \dots, x_k oraz liczby naturalne m_0, m_1, \dots, m_k takie, że $\sum_{i=0}^k m_i = n + 1$. Zadanie interpolacyjne Hermite'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu H_n stopnia nie wyższego niż n , spełniającego warunki:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

2. Znajdź wielomian interpolacyjny Hermite'a w postaci Newtona

ROZWIĄZANIE:

$$H_4(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + b_3(x-x_0)^3 + b_4(x-x_0)^3(x-x_1)$$

x	f(x _{0,2})	
2	—	
2	f[x _{0,2}] = f'(x ₀) = 2	
2	f[x _{0,2}] = f'(x ₀) = 2	f[x _{0,3}] = $\frac{f''(x_0)}{2!} = 0$
3	f[x _{0,1}] = $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0$	f[x _{0,2,1}] = $\frac{f[x_{0,1}] - f[x_{0,2}]}{x_1 - x_0} = -2$
3	f[x _{1,2}] = f'(x ₁) = 2	f[x _{0,1,2}] = $\frac{f[x_{1,2}] - f[x_{0,1}]}{x_1 - x_0} = 2$

$$f[x_{0,3,1}] = \frac{-2 - 0}{2 - 2} = \text{nieokreślone} \quad -2$$

$$f[x_{0,2,1,2}] = \frac{f[x_{0,1,2}] - f[x_{0,2,1}]}{x_1 - x_0} = 4 \quad f[x_{0,3,1,2}] = \frac{f[x_{0,2,1,2}] - f[x_{0,3,1}]}{x_1 - x_0} = 6$$

$$H_4 = 1 + 2(x-2) + 0 \cdot (x-x_0)^2 + \dots$$

ROZWIĄZANIE:

~~$$H(x) = 1 + 2(x-2) + \dots + 4(x-2)^3(x-3)$$~~

b₀: b₀ = f[x₀] = 1

b₁ = f[x_{0,2}] = 2

b₂ = f[x_{0,3}] = 0

b₃ = f[x_{0,3,1}] = ~~nieokreślone~~ = 0? -2

b₄ = f[x_{0,3,1,2}] = 6

$$H(x) = 1 + 2(x-2) - 2(x-2)^3 + 6(x-2)^3(x-3)$$

Zad1

1. Podaj definicje aproksymacji Pade

$$r_{kl}(x) = \frac{p_k(x)}{q_l(x)} = \frac{a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + \dots + b_1 x + b_0} \quad (17)$$

Przybliżeniami Padego funkcji f są nazywane funkcje wymierne (17) tak konstruowane, aby przy danych k i l , w punkcie $x = 0$ wartości funkcji f i r_{kl} oraz możliwie wielu ich pochodnych były równe.

2. Wyznacz aproksymacje Pade $r_{1,3}$

2) Wyznacz aproksymację Pade $r_{1,3}$:

$$r_{1,3} = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$

dla funkcji $f(x) = x^2 + e^x$ w punkcie $x = 0$.

$$r_{1,3} = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x + b_3 x}$$

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$k=1$$

$$l=3$$

liczymy do 4-ej pochodnej

bo $k+l=4$

$$f(x) = x^2 + e^x$$

$$f'(x) = 2x + e^x$$

$$f''(x) = 2 + e^x$$

$$f'''(x) = e^x$$

$$f^{(4)}(x) = e^x$$

dla $x=0$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 3$$

$$f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(0) = 1$$

$$c_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

$$c_0 = 1 \quad c_1 = 1 \quad c_2 = \frac{3}{2} \quad c_3 = \frac{1}{6} \quad c_4 = \frac{1}{24}$$

$$b_0 = 1$$

$$a_i = 0 \text{ dla } i > k$$

$$b_i = 0 \text{ dla } i > l$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{i=0}^k b_i x^i \right) = \left(\sum_{i=0}^k a_i x^i \right) \left(\sum_{i=l+k+1}^{\infty} d_i x^i \right)$$

$$d_0 x^0 = 1x^0 \cdot b_0 x^0 - a_0 x^0$$

$$d_0 = 1 - a_0$$

$$d_1 x + d_0 = (1+x)(b_0 + b_1 x) - a_0 - a_1 x$$

$$d_1 x + 1 - a_0 = 1 + b_1 x + x + b_1 x^2 - a_0 - a_1 x$$

- $d_1 = b_1 + 1 - a_1$

Od teraz wszystkie a_0 i a_1 będą się skracać a pozostałe $a_i \neq 0$, więc pomijam

$$d_2 x^2 + d_1 x + d_0 = (1 + x + \frac{3}{2} x^2)(1 + b_1 x + b_2 x^2)$$

$$d_2 x^2 + b_1 x + 1 = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} b_1 x^3 + 3 b_2 x^4$$

Wśródnie gdzie zostanie jakieś wyrażenie z "x" po podzieleniu obu stron przez x^i , wyrzucamy to wyrażenie

- $d_2 = b_2 + b_1 + \frac{3}{2}$

$$d_3 x^3 + d_2 x^2 + d_1 x + d_0 = (1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3)(1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$$

$$d_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x^2 + 3 x^2 + b_1 x + x + 1 =$$

$$= 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + b_3 x^4 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} b_1 x^3 + \frac{3}{2} b_2 x^4 + \frac{3}{2} b_3 x^5 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{6} b_1 x^4 + \frac{1}{6} b_2 x^5 + \frac{1}{6} b_3 x^6$$

- $d_3 = b_3 + b_2 + \frac{3}{2} b_1 + \frac{1}{6}$

Od teraz b_n i wyżej $= 0$ bo $i > 4$ więc pomijam

$$d_4 x^4 + d_3 x^3 + d_2 x^2 + d_1 x + d_0 = (1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4)(1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$$

$$d_4 x^4 + b_3 + b_2 + \frac{3}{2} b_1 + \frac{1}{6} + b_2 + b_1 + \frac{3}{2} + b_1 + 1 + 1 =$$

$$= 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + b_3 x^4 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} b_1 x^3 + \frac{3}{2} b_2 x^4 + \frac{3}{2} b_3 x^5 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{6} b_1 x^4 + \frac{1}{6} b_2 x^5 + \frac{1}{6} b_3 x^6 + \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{24} b_1 x^5 + \frac{1}{24} b_2 x^6 + \frac{1}{24} b_3 x^7$$

- $d_4 = b_3 + \frac{3}{2} b_2 + \frac{1}{6} b_1 + \frac{1}{24}$

$$\begin{cases} d_0 = 1 - a_0 = 0 \\ d_1 = b_1 + 1 - a_1 = 0 \\ d_2 = b_2 + b_1 + \frac{3}{2} = 0 \\ d_3 = b_3 + b_2 + \frac{3}{2}b_1 + \frac{1}{6} = 0 \\ d_4 = b_3 + \frac{3}{2}b_2 + \frac{1}{6}b_1 + \frac{1}{24} = 0 \end{cases}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{23}{44}$$

$$b_1 = -\frac{21}{44}$$

$$b_2 = -\frac{45}{44}$$

$$b_3 = \frac{415}{264}$$

obliczone
ręcznie w tradycyjny
sposób oraz
metoda gaussa
i na trzech różnych
kalkulatorach online.

$$r_{1,3} = \frac{1 + \frac{23}{44}x}{1 - \frac{21}{44}x - \frac{45}{44}x^2 + \frac{415}{264}x^3}$$

Układ równań:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1 \\ 0x_1 + -1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 = -3/2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 3/2x_3 + 1x_4 + 1x_5 = -1/6 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1/6x_3 + 3/2x_4 + 1x_5 = -1/24 \end{cases}$$

Wynik:

$$\circ x_1 = 1$$

$$\circ x_2 = \frac{23}{44}$$

$$\circ x_3 = \frac{-21}{44}$$

$$\circ x_4 = \frac{-45}{44}$$

$$\circ x_5 = \frac{415}{264}$$

Zad 2

1. Zdefiniuj zadanie aproksymacji średniokwadratowej w przestrzeni $L^2_p[a,b]$.

Zadanie aproksymacji średniokwadratowej w przestrzeni $L^2_p[a,b]$ polega na wyznaczeniu takiej funkcji g , która na przedziale $\langle a,b \rangle$ aproksymuje pewną funkcję f najlepiej (tj. z najmniejszym błędem średniokwadratowym) spośród wszystkich funkcji należących do pewnej wybranej podprzestrzeni zbioru funkcji $L^2_p[a,b]$ (np. ze zbioru wielomianów stopnia 1).

$L^2_p[a,b]$ jest to zbiór funkcji mierzalnych na $[a,b]$ i takich, że $\int_a^b f^2(x)p(x)dx < \infty$,
gdzie $p(x)$ to pewna nieujemna, zerująca się na zbiorze miary zero funkcja zwana funkcją wagową, taka, że $\int_a^b p(x)dx < \infty$.

Jeżeli przyjmiemy następującą normę: $\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)p(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$ dla tego zbioru (przestrzeni), to będzie on przestrzenią liniową unormowaną. Naszym zadaniem jest znalezienie funkcji, dla której norma ta przyjmuje najmniejszą wartość.

2. Podaj metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta i wykonaj ten algorytm dla bazy $\{1,x,x^2\}$.

W metodzie ortogonalizacji Grama-Schmidta układ ortogonalny definiujemy następująco:

$$g_1 = f_1$$
$$g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(f_i, g_j)}{(g_j, g_j)} g_j \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta dla bazy $\{1, x, x^2\}$

$$f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$$

$$g_1 = f_1$$

$$g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(f_i, g_j)}{(g_j, g_j)} g_j \quad i = 2, 3, 4, \dots, n$$

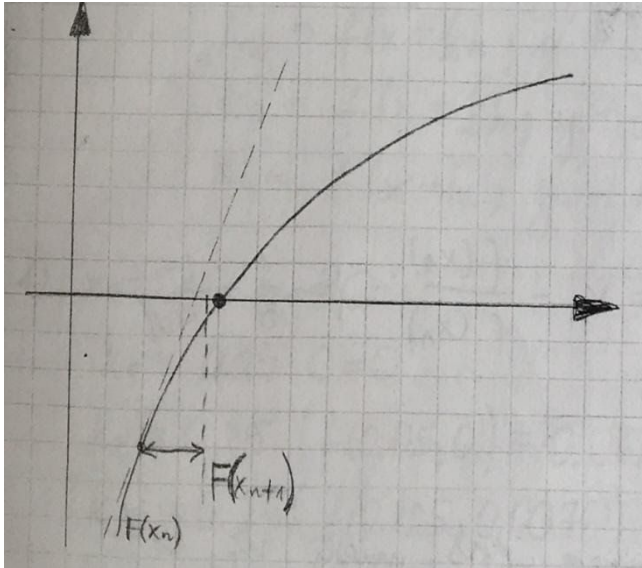
$$g_2 = 1$$

$$g_2 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} \cdot 1$$

$$g_3 = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 - \frac{(x^2, g_2)}{(g_2, g_2)} \cdot g_2$$

Zad3

1. Równania nieliniowe. Podaj ogólny iteracyjny schemat znajdowania zer funkcji



Mamy daną funkcję $f(x)$. Szukamy takiego miejsca żeby $f(x)=0$.

Wybieramy punkt początkowy, obliczamy wartość w tym punkcie a następnie szukamy kolejnego punktu, żeby był bliżej miejsca zerowego. W poszukiwaniach tych wykorzystujemy poprzedni punkt

[Zacytuj źródło tutaj.]

Definicja

Ogólny schemat metod iteracyjnego znajdowania zer funkcji

1. Przekształcamy równanie $f(x)=0$ do postaci

$$x=\phi(x)$$

poprzez podstawienie

$$\phi(x)=x-g(x)f(x)$$

gdzie g jest funkcją ciągłą i $g \neq 0$.

Punkt x^* taki, że równanie jest spełnione nazywa się *punktem stałym*. Często postać $x=f(x)$ równania jest jego postacią „naturalną”; wtedy mówimy o metodzie *iteracji prostej* (przykład z mechaniki kwantowej: SCF).

2. Tworzymy ciąg kolejnych przybliżeń $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p)}, \dots$ (w założeniu zbieżny do x^*) taki, że

$$x^{(p+1)}=\phi(x^{(p)})$$

gdzie $x^{(0)}$ jest przybliżeniem początkowym. Taka procedura jest nazywana *procedurą iteracyjną* a funkcja ϕ *funkcją iteracyjną*.

3. Procedurę iteracyjną kończymy jeżeli kolejne przybliżenia x^* różnią się odpowiednio mało (zbieżność) lub wykonaliśmy maksymalną zadaną liczbę kroków (brak zbieżności).

2. Podaj twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania (założenie i tezę)

- Kiedy istnieje jedno rozwiązanie?

Twierdzenie

Jeżeli $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x dla $x \in [a, b]$ i spełnia warunek Lipschitza ze względu na y , tzn. istnieje stała L taka, że dla dowolnych rzeczywistych y_1, y_2 i dla każdego $x \in [a, b]$ jest spełniona nierówność

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (6)$$

to dla każdego skończonego y_a istnieje dokładnie jedna funkcja $y(x)$ ciągła i różniczkowalna na $[a, b]$ taka, że

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{oraz} \quad y(a) = y_a \quad (7)$$

3. Zdefiniuj metodę siecznych, pokaż jej związek z ogólnym schematem z p1



Metoda siecznych

Metoda siecznych

W metodzie newtona w każdej iteracji musimy obliczyć wartość funkcji i wartość pochodnej. Aby uniknąć obliczania pochodnej możemy wartość pochodnej zastąpić ilorazem różnicowym. Wzór na kolejne przybliżenie wtedy przyjmuje postać:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

4. Za pomocą siecznych rozwiązać równanie $f(x)=x^2-2$

Mamy równanie $f(x) = x^2 - 2$

Wybieramy przedział w którym będziemy szukać miejsca zerowego np. $x_1=0$ i $x_2=2$.

Podstawiamy do wzoru $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$

I tak aż do momentu aż otrzymamy punkt który uznamy za wystarczająco bliski rzeczywistej wartości miejsca zerowego.

Handwritten solution showing the iterative steps of the secant method for the equation $f(x) = x^2 - 2$:

$$f(x) = x^2 - 2$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 2 - \frac{2-0}{2+2} \cdot 2$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 1 - \frac{1-2}{-1-2} \cdot (-1)$$
$$x_4 = \frac{4}{3}$$
$$x_5 = \frac{4}{3} - \frac{\frac{4}{3}-1}{-\frac{2}{9}+1} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$$
$$x_5 = \frac{10}{7} \approx 1,42857$$

T3 2018

Zad 2

1. Interpolacja Hermite'a – definicja ilorazu różnicowego i przykład z wielomianem w postaci Newtona

Danych jest $k + 1$ różnych węzłów

$$x_0, x_1, \dots, x_k$$

oraz liczby naturalne

$$m_0, m_1, \dots, m_k \text{ takie, że } \sum_{i=0}^k m_i = n + 1.$$

Zadanie interpolacyjne Hermite'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu H_n stopnia nie wyższego niż n , spełniającego warunki:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

Ilorazy różnicowe def.

Definicja. Ilorazy różnicowe funkcji f oparte na wielokrotnych węzłach definiujemy jako zależności:

- dla i -krotnego węzła x_l

$$f[x_l, i] = \frac{f^{(i-1)}(x_l)}{(i-1)!}$$

- dla różnych węzłów $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}$ o krotnościach odpowiednio $i_l, i_{l+1}, \dots, i_{l+k}$

$$f[x_l, i_l; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k}] = \frac{(f[x_l, i_l - 1; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k}] - f[x_l, i_l; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k} - 1])}{(x_{l+k} - x_l)}$$

Zakładamy, że istnieją pochodne $f^{(j)}(x_{l+m})$ dla $m = 0, 1, \dots, k$,
 $j = 0, 1, \dots, i_{l+m} - 1$.

Przykład.

Dane są węzły x_0 i x_1 o krotnościach odpowiednio $m_0 = 3$, $m_1 = 2$. Dla danej funkcji f szukamy wielomianu interpolacyjnego Hermite'a H_4 takiego, że:

$$\begin{aligned} H_4(x_0) &= f(x_0) & H_4'(x_0) &= f'(x_0) & H_4''(x_0) &= f''(x_0) \\ H_4(x_1) &= f(x_1) & H_4'(x_1) &= f'(x_1) & & \end{aligned}$$

Wielomian H_4 można zapisać w postaci Newtona:

$$H_4(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + b_3(x-x_0)^3 + b_4(x-x_0)^3(x-x_1)$$

Współczynniki b_i są odpowiednimi ilorazami różnicowymi leżącymi na przekątnej, np.

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0), \quad b_3 = f[x_0, 3; x_1]$$

Tablica ilorazów różnicowych dla omawianego przykładu ma postać

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & f(x_0) & & & & & \\ x_0 & f(x_0) & f[x_0, 2] = f'(x_0) & & & & \\ x_0 & f(x_0) & f[x_0, 2] = f'(x_0) & f[x_0, 3] = \frac{f''(x_0)}{2!} & & & \\ x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & f[x_0, 2; x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, 2]}{x_1 - x_0} & f[x_0, 3; x_1] & & \\ x_1 & f(x_1) & f[x_1, 2] = f'(x_1) & f[x_0; x_1, 2] = \frac{f[x_1, 2] - f[x_0, x_1]}{x_1 - x_0} & f[x_0, 2; x_1, 2] = \frac{f[x_0; x_1, 2] - f[x_0, 2; x_1]}{x_1 - x_0} & f[x_0, 3; x_1, 2] = \frac{f[x_0, 2; x_1, 2] - f[x_0, 3; x_1]}{x_1 - x_0} & \end{array}$$

Zad 3

1. Metoda Newtona (Newtona-Raphsona) znajdowania miejsc zerowych - definicja i znaleźć przybliżenie $\text{cbrt}(9)$

METODA NEWTONA (2018 termin 3, zad 3)

Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i posiada pochodną.

Schemat:

1. Wybieramy punkt startowy, zazwyczaj $a, b, 0$ lub 1 .
2. Wyznaczamy styczną w tym punkcie do funkcji $f(x)$.
Współrzędna odcięta punktu przecięcia stycznej z osią Ox stanowi pierwsze przybliżenie pierwiastka funkcji.
3. Jeżeli przybliżenie to nie jest zadowalające powtarzamy krok 2.

Wzór rekurencyjny na kolejne przybliżenie:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Przybliżenie $\sqrt[3]{9}$ za pomocą metody Newtona:

$$\sqrt[3]{9} = x \Rightarrow g = x^3 \Rightarrow x^3 - g = 0$$

$$f(x) = x^3 - 9$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Zakładamy, że punkt startowy $x_0 = 1$.

$$x_1 = 1 - \frac{1^3 - 9}{3 \cdot 1^2} \cong 3,6667$$

$$x_2 = 3,6667 - \frac{(3,6667)^3 - 9}{3 \cdot (3,6667)^2} \cong 2,6676$$

$$x_3 = 2,6676 - \frac{(2,6676)^3 - 9}{3 \cdot (2,6676)^2} \cong 2,2000$$

$$x_4 = 2,2000 - \frac{(2,2000)^3 - 9}{3 \cdot (2,2000)^2} \cong \underline{\underline{2,0865}}$$

Termin 0 - 2011

1. Przestrzeń Kryłowa

Przestrzeń Kryłowa K to podprzestrzeń liniowa R^n (lub ogólniej C^n) generowana poprzez iteracyjne mnożenie wektora $h \in R_n$ przez macierz kwadratową A : $K = \text{lin}\{h, Ah, A^2h, \dots, A^{n-1}h\}$. Wiele współczesnych iteracyjnych metod rozwiązywania własnego macierzy opiera się na korzystaniu z przestrzeni (częściej z podprzestrzeni) Kryłowa. W slajdach Szeligi wzór na **podprzestrzeń** Kryłowa jest taki: $K_m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{m-1}r_0\}$, $r_0 = b - Ax_0$

2. Wyprowadzić Runge-Kuttego 4 rzędu

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1h\right)$$

$$K_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_2h\right)$$

$$K_4 = f(x_i + h, y_i + K_3h)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Ciąg przybliżeń zgodnie ze wzorem:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h), & i = 0, 1, \dots, N \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

Jej szczególnym przypadkiem jest klasyczna metoda RK 4:

$$y_{i+1} = y_i + (c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3 + c_4K_4)h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + a_2h, y_i + b_{21}hK_1)$$

$$K_3 = f(x_i + a_3h, y_i + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2)$$

$$K_4 = f(x_i + a_4h, y_i + b_{41}hK_1 + b_{42}hK_2 + b_{43}hK_3)$$

3. Wartości własne i wektory własne

Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Niech $f : X \rightarrow X$ będzie **endomorfizmem**, tj. odwzorowaniem liniowym przekształcającym przestrzeń liniową w nią samą.

Definicja 7.1. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ nazywamy **wartością własną** endomorfizmu f jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in X$, taki że

$$f(v) = \lambda v; \quad (7.1)$$

wektor v nazywamy **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej λ .

Zachodzi następujące

Twierdzenie 7.1. Dla endomorfizmu $f : X \rightarrow X$ następujące warunki są równoważne:

- (a) λ jest wartością własną f ;
- (b) $\ker(f - \lambda \text{id}_X) \neq \{0\}$;
- (c) $\det(A_f - \lambda I) = 0$, gdzie A_f jest macierzą endomorfizmu f (w dowolnej bazie przestrzeni X).

Ponieważ każda macierz kwadratowa $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ wyznacza naturalny endomorfizm

$$f : \mathbb{F}^n \ni v \rightarrow f(v) = Av \in \mathbb{F}^n,$$

zatem pojęcia wartości własnej oraz wektora własnego w sposób naturalny przenoszą się na macierze.

Definicja 7.2. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ nazywamy **wartością własną** macierzy $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{F}^n$, taki że

$$Av = \lambda v;$$

wektor v nazywamy **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej λ .

Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy $\sigma(A)$ i nazywamy **widmem** macierzy A .

4. Metoda gradientów sprzężonych

NIE MA NIC W JEJ PREZENTACJACH WIĘC POMIJAM

5. Formy kwadratowe

Rozważmy rzeczywistą macierz symetryczną $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definicja 10.1. Funkcję $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$h(x) = x^T A x \quad (10.1)$$

nazywamy **formą kwadratową**. Macierz symetryczną A występującą w powyższym równaniu nazywamy macierzą formy kwadratowej h .

Przyjmując $A = [a_{ij}]$, wzór (10.1) możemy równoważnie wyrazić w postaci

$$h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Przykład 10.1. Odwzorowania

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

oraz

$$h_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

są formami kwadratowymi o macierzach

$$A_{h_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad A_{h_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odwzorowania

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2 \quad \text{oraz} \quad g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1$$

nie są formami kwadratowymi.

Termin 1 - 2013

1. Metoda RK2

W prezentacjach nie ma nic stricte o RK2 tylko o klasie metod RK. Nie wiem co tu wpisać.

2. Metoda Eulera

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

Różnicowa metoda przybliżania wartości. Wyprowadzenie jest 'w miarę' prosto opisane w prezentacji więc pomijam. W metodzie chodzi o to, że jest to metoda jednokrokowa czyli każde kolejne przybliżenie korzysta z tego wyliczonego wcześniej. Musimy mieć podany początkowy punkt i wartość funkcji w tym punkcie. Wtedy określamy krok co jaki będziemy przybliżać kolejne wartości. Im mniejszy krok h tym dokładniejsze przybliżenie. Ale im większa różnica między obliczonym punktem x a początkowym x_0 tym większy błąd obliczeń. Generalnie metoda nie jest dokładna.

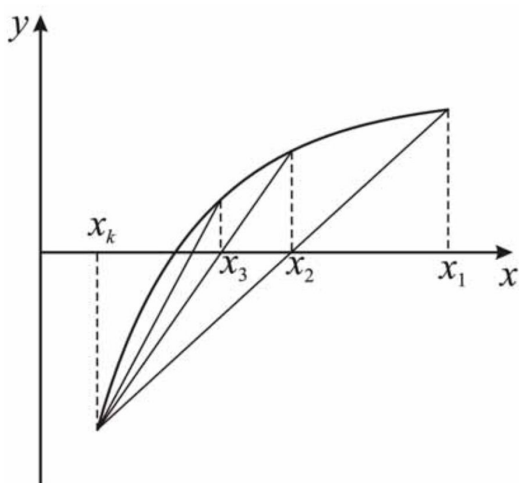
3. Metoda siecznych i stycznych

a. siecznych

Do znalezienia kolejnych przybliżeń użyjemy interpolacji liniowej. Po mojemu najprościej to będzie tak. Jest sobie jakaś funkcja. Teraz zakładamy że na jakimś małym przedziale $[a,b]$ jest ona liniowa. I ten jej fragment na odcinku $[a,b]$ możemy wtedy zastąpić prostą (sieczną) bo założyliśmy zależność liniową. I teraz za przybliżoną wartość pierwiastka na tym przedziale przyjmujemy miejsce przecięcia naszej linii z osią OX . Ten przedział $[a,b]$ nazywamy 'przedziałem izolacji'

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Czyli w skrócie metoda polega na przybliżeniu rozwiązania ciągiem miejsc zerowych cięćw które wyznaczymy na kolejnych przedziałach izolacji.



b. stycznych

Generalnie to polega to na tym samym tylko interpolujemy stycznymi a nie prostymi. I teraz nasze pierwiastki to odcięte punktu przecięcia stycznej z osią OX.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Tu są spoko przykłady z rozwiązaniami i najprościej jak się da wytłumaczone obie metody:
[PRZYBLIŻONE METODY ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ](#)

4. układ równań, A-M, przepływy

Co autor miał na myśli ???

Termin 1 - 2014

1. Dana jest liczba $13.73_{(10)}$. Zapisz tę liczbę w znormalizowanym zapisie zmiennoprzecinkowym o podstawie 2.

Kroki:

- Przeliczamy liczbę na system dwójkowy (bo podstawa 2), osobno część całkowitą i ułamkową. U nas to będzie $13.73_{(10)} = 1101.01001001_{(2)}$

- Dodajemy cechę równą zero czyli $1101.01001001_{(2)} * 10^0$

- Normalizujemy czyli przesuwamy przecinek w lewo o 3: $1.10101001001_{(2)} * 10^3$

To raczej jest źle ale nic z tego tematu nie rozumiem niestety. Jak ktoś wie o co chodzi w pierwszym zadaniu to niech to poprawi. Drugiego podpunktu nawet nie ruszam.

2. Zdefiniuj zadanie aproksymacji średniokwadratowej w przestrzeni $L^2_p[a, b]$ i $L^2_{p,N}$

Zadanie aproksymacji średniokwadratowej w przestrzeni $L^2_p[a, b]$ polega na wyznaczeniu takiej funkcji g , która na przedziale $\langle a, b \rangle$ aproksymuje pewną funkcję f najlepiej (tj. z najmniejszym błędem średniokwadratowym) spośród wszystkich funkcji należących do pewnej wybranej podprzestrzeni zbioru funkcji $L^2_p[a, b]$ (np. ze zbioru wielomianów stopnia 1).

$L^2_p[a, b]$ jest to zbiór funkcji mierzalnych na $[a, b]$ i takich, że $\int_a^b f^2(x)p(x)dx < \infty$, gdzie $p(x)$ to pewna nieujemna, zerująca się na zbiorze miary zero funkcja zwana funkcją wagową, taka, że $\int_a^b p(x)dx < \infty$.

Jeżeli przyjmiemy następującą normę: $\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)p(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$ dla tego zbioru (przestrzeni), to będzie on przestrzenią liniową unormowaną. Naszym zadaniem jest znalezienie funkcji, dla której norma ta przyjmuje najmniejszą wartość.

3. Podaj metodę ortogonalizacji Gramma-Schmidta i wykonaj ten algorytm dla bazy $\{1, x, x^2\}$

W metodzie Grama-Schmidta układ ortogonalny definiujemy następująco

$$g_1 = f_1$$

$$g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(f_i, g_j)}{(g_j, g_j)} g_j \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta dla bazy $\{1, x, x^2\}$

$f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$

$g_1 = f_1$

$g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(f_i, g_j)}{(g_j, g_j)} g_j \quad i = 2, 3, 4, \dots, n$

$g_2 = 1$

$g_2 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} \cdot 1$

$g_3 = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 - \frac{(x^2, g_2)}{(g_2, g_2)} \cdot g_2$

4. Dla funkcji \sqrt{x} pokaż, jak skonstruować drugi wielomian optymalny w sensie aproksymacji średniokwadratowej z wagą 1 na przedziale $[0,1]$

Rozwiązaniem jest $\alpha_1 = \frac{8}{35}$, $\alpha_2 = \frac{8}{7}$, $\alpha_3 = -\frac{8}{21}$. Drugi wielomian optymalny dla $f(x) = \sqrt{x}$ jest równy:

$$w_2^*(x) = \frac{8}{35} + \frac{8}{7}x - \frac{8}{21}x^2$$

Dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ szukamy drugiego wielomianu optymalnego w sensie aproks. średniokw. z wagą $p(x) = x$ na przedziale $[0,1]$, tzn. dla $f(x) = \sqrt{x} \in L_p^2[0,1]$, $p(x) = x$, szukamy elementu optymalnego względem podprzestrzeni W_2 .

Rozwiązania.

1. Baza dla W_2 : wielomiany $1, x, x^2$.

Obliczamy elementy a_{ij} macierzy układu równań normalnych:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} x dx = \frac{1}{i+j}$$

Analogicznie obliczamy składowe prawej strony (x^{i-1}, \sqrt{x})

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 &= \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{5}\alpha_3 &= \frac{7}{7} \\ \frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{5}\alpha_2 + \frac{1}{6}\alpha_3 &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

5. Co to jest układ równań normalnych dla zadania aproksymacji. Podaj przykład wybranej funkcji dla której poszukiwany jest wielomian optymalny w bazie.

NIEWIEM

6. Podaj algorytm eliminacji Gaussa rozwiązywania liniowych układów równań.

- Postać macierzowa

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Dopisujemy do macierzy A wektor wyrazów wolnych B (macierz rozszerzona)

$$A|B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{bmatrix}$$

- W kolejnych krokach rozpoczynamy przekształcanie rozszerzonej macierzy $A|B$ w macierz trójkątną górną
– Etap ten nosi nazwę etapu eliminacji

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,1} & a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,2} & \dots & a_{2,n} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,n} & b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}a_{1,1} & a_{n,2} - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}a_{1,2} & \dots & a_{n,n} - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}a_{1,n} & b_n - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,2} & \dots & a_{2,n} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,n} & b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,2} - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}a_{1,2} & \dots & a_{n,n} - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}a_{1,n} & b_n - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}b_1 \end{bmatrix}$$

- Otrzymujemy macierz

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} & b'_n \end{bmatrix}$$

$$a_{ii} \quad i = 0, n-1$$

$$a_{k,i} \quad k = i+1, n-1, \quad i = 0, n-1$$

- Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \dots & a'_{2,n-1} & a'_{2,n} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & \dots & a''_{3,n-1} & a''_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a'''_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \dots \\ b'''_n \end{bmatrix}$$

- Kolejne składowe x_i znajdujemy rekurencyjnie wg wzorów

$$x_n = \frac{b'''_n}{a'''_{n,n}}$$

$$x_i = \frac{b''_i - a''_{i,n}x_n - \dots - a''_{i,i+1}x_{i+1}}{a''_{i,i}}, \text{ dla } i = n-1, n-2, \dots, 1$$

7. Podaj przykład układu źle uwarunkowanego dla metody eliminacji Gaussa.

Jakikolwiek układ gdzie na przekątnej są zera bo trzeba wtedy przesuwac wiersze.

8. Wymień i opisz znane ci metody rozwiązywania nieliniowych równań jednej niewiadomej.

metoda bisekcji (połowienia) - jest najprostszą ze wszystkich możliwych metod i jest bardzo wolno zbieżna. Dane jest równanie $f(x) = 0$, przy czym funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ oraz zachodzi nierówność: $f(a) f(b) < 0$

metoda regula falsi (interpolacji liniowej) - metoda bazuje na fałszywym twierdzeniu, że w pewnym przedziale funkcja zawsze jest liniowa. Metoda ta jest szybciej zbieżna od metody bisekcji, a ponadto jej zbieżność jest również gwarantowana. W interpretacji geometrycznej metoda interpolacji liniowej oznacza zastąpienie krzywej $f(x)$ cięciwą łączącą punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Dla $y = 0$ mamy

$$x_k = \frac{a f_b - b f_a}{f_b - f_a}$$

metoda siecznych - w tej metodzie generowanie ciągu kolejnych przybliżeń wartości poszukiwanego pierwiastka odbywa się także za pomocą interpolacji liniowej. Stosowana strategia interpolacji liniowej polega jednak na tym, że jest ona budowana na podstawie znanych wartości dwóch ostatnio obliczonych rzędnych funkcji $f(x)$.

metoda stycznych (Newtona-Raphsona) - (ogólnie polega na obliczaniu pochodnej funkcji) analizujemy funkcję f zmiennej x w otoczeniu punktu x_0 . Definiujemy iloraz (różnicowy) funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu Δx :

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Pochodna funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 jest to granica, do której dąży iloraz, gdy Δx dąży do 0, o ile taka granica istnieje:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (8)$$

Obliczanie pochodnej $f'(x)$ to różniczkowanie funkcji $f(x)$.

Pochodna istnieje, jeśli:

- funkcja $f(x)$ jest ciągła,
- istnieje granica określona w (8) – funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna.

9. Zdefiniuj zagadnienie początkowe Cauchy'ego

I Zagadnienie rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, czyli równań postaci: $y' = f(x, y)$ gdzie f - funkcja dwu zmiennych

Funkcję $y = y(x)$ określoną i różniczkowalną dla x należących do ustalonego przedziału $[a, b]$ nazywamy rozwiązaniem równania $y' = f(x, y)$ jeśli $y'(x) = f(x, y(x))$ $x \in [a, b]$

Równanie $y' = f(x, y)$ może mieć wiele rozwiązań, np. rozwiązaniem równania $y' = y$ jest każda funkcja postaci $y(x) = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$

II Narzucamy dodatkowy warunek dla zapewnienia jednoznaczności rozwiązania

- warunek początkowy - $y(a) = y_a$ i wtedy wraz z równaniem $y' = f(x, y)$ nosi nazwę zagadnienia początkowego lub zagadnienia Cauchy'ego dla równania pierwszego rzędu
- warunek brzegowy - $g(y(a), y(b)) = 0$ gdzie g jest daną funkcją dwóch zmiennych i wtedy wraz z równaniem $y' = f(x, y)$ nosi nazwę zagadnienia brzegowego

III Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (5)$$

Równanie (5) może mieć jedno rozwiązanie, wiele rozwiązań lub być sprzeczne

IV Kiedy istnieje jedno rozwiązanie?

Jeżeli $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x dla $x \in [a, b]$ i spełnia warunek Lipschitza ze względu na y , tzn. istnieje stała L taka, że dla dowolnych rzeczywistych y_1, y_2 i dla każdego $x \in [a, b]$ jest spełniona nierówność

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

to dla każdego skończonego y_a istnieje dokładnie jedna funkcja $y(x)$ ciągła i różniczkowalna na $[a, b]$ taka, że

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ oraz } y(a) = y_a$$

V Najczęściej rozwiązanie zadania początkowego (5) wymaga użycia jakiejś przybliżonej metody całkowania tego zadania. Dla obliczeń numerycznych, w związku z błędami reprezentacji, zamiast zadania (5) rozwiązujemy zadanie postaci

$$\begin{cases} z' = f(x, z) + \delta f(x) & x \in [a, b] \\ z(a) = y_a + \delta y_a \end{cases}$$

gdzie $\delta f(x)$ i δy_a są niewielkimi zaburzeniami f i y_a .

Jeśli funkcja f spełnia założenia powyższego twierdzenia, to zadanie jest poprawnie postawione.

10. Zdefiniuj metodę Eulera

I Sposobów wyprowadzania metod różnicowych może być wiele

Niech $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = (a-b)/N$

Pochodną $y_0'(x)$ przybliżamy ilorazem różnicowym pierwszego rzędu opartym na węzłach x i $x + h$

Niech $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = (a - b)/N$

Jeśli funkcja $f \in C_{[a,b] \times \mathbb{R}}$, rozwiązanie y równania $y_0' = f(x, y)$ jest klasy $C^2_{[a,b]}$ i ze wzoru Taylora z resztą otrzymujemy równość

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \quad \xi \in [x, x+h]$$

II Ponieważ

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

więc w punktach $x = x_i$ zachodzi

$$\begin{cases} y'(x_{i+1}) = f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + g_i \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

gdzie

$$|g_i| \leq M_2 h^2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} \frac{|y''(x)|}{2} \quad (14)$$

Odrzucając w równaniu (14) nieznaną składnik g_i , otrzymujemy metodę Eulera konstruując ciąg przybliżeń $\{y_i\}$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

11. Rozwiąż metodę Eulera przykładowe równanie różniczkowe

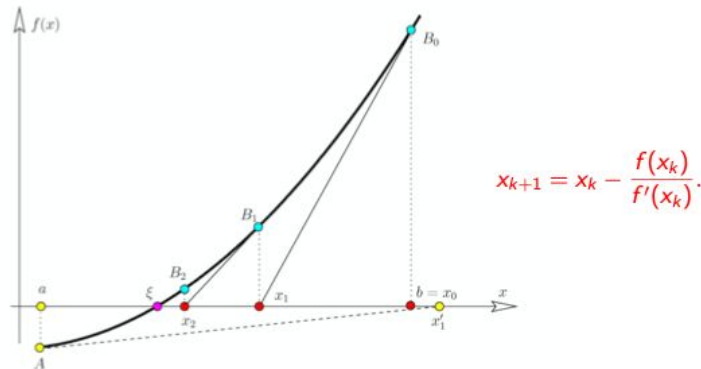
https://epodreczniki.open.agh.edu.pl/openagh-podreczniki_view.php?mode=view&catId=4&handbookId=63&moduleId=582

Termin 3 - 2015

1. Opisz metodę Newtona- Raphsona. Rozwiąż tą metodą jakieś równanie.

- opiera się na wyznaczaniu **stycznych** do wykresu badanej funkcji $f(x)$ w kolejnych przybliżeniach

- podstawą metody stanowi interpolacja funkcji $f(x)$ za pomocą stycznej prowadzonej w punkcie $B(x_0, f_0)$. Kolejne przybliżenia są odciętymi punktu przecięcia stycznej z osią x .



- wykładnik zbieżności jest równy 2 -> czyli metoda jest lokalnie zbieżna kwadratowo (przy spełnionych założeniach jej błąd maleje kwadratowo wraz z liczbą iteracji)
- jest najszybciej zbieżną metodą
- wymaga największego nakładu obliczeniowego na poszczególną iterację
- metoda bywa rozbieżna, gdy punkt startowy jest zbyt daleko od szukanego pierwiastka równania

Metoda Newtona - Rapnsone

$$2x_1 + x_2^2 = 6$$

$$x_1 x_2 = 2$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2^2 - 6 \\ x_1 x_2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jacobian: $J(x) = \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$

$$x_{k+1} = x_k - [J(x_k)]^{-1} F(x_k)$$

$$J(x_k)^{-1} = \frac{1}{2x_1 - 2x_2^2} \begin{bmatrix} x_1 & -2x_2 \\ -x_2 & 2 \end{bmatrix}$$

1 iteracja: $x_1 = x_0 - [J(x_0)]^{-1} F(x_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

rozw. dodatnie

2. Kwadratura liniowa

Kwadratura liniowa- jest synonimem całkowania numerycznego. Metody całkowania numerycznego polegają na przybliżeniu całki za pomocą odpowiedniej sumy ważonej wartości całkowanej funkcji w kilku punktach. Wynik ostateczny jest sumą oszacowań całek w poszczególnych podprzedziałach.

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n_0} A_{i,0} f(x_{i,0}) + \sum_{i=1}^{n_1} A_{i,1} f'(x_{i,1}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} A_{i,k} f^{(k)}(x_{i,k})$$

Funkcjonał Q to *kwadratura liniowa*,
współczynniki $A_{i,j}$ to *współczynniki kwadratury*,
punkty $x_{i,j}$ to *węzły kwadratury*

Kwadratura Newtona-Cotesa

- jest to kwadratura złożona
- nie jest kwadraturą interpolacyjną
- zadany przedział $[a,b]$ dzielimy na mniejsze podprzedziały, a następnie w poszczególnych podprzedziałach stosujemy kwadratury proste (interpolacyjne)

1. Dzielimy przedział $[a, b]$ na N podprzedziałów z węzłami równoodległymi $x_i = a + i \frac{b-a}{N}, i = 0, \dots, N$.
2. W każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, \dots, N$) wyznaczamy $n + 1$ węzłów postaci: $x_{ij} = x_i + j \frac{x_{i+1} - x_i}{n}, j = 0, \dots, n$.
3. W każdym z przedziałów stosujemy kwadraturę Newtona-Cotesa opartą na $n + 1$ węzłach, czyli: $I^{(i)}(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = Q_i(f) - E_i(f)$

Zatem złożona kwadratura Newtona-Cotesa przedstawia się wzorem:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{N-1} Q_i(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^n A_j f(x_{ij}) \quad (6.14)$$

3. Jak wygląda ta kwadratura dla $n=1$ dla funkcji f , gdzie n to liczba węzłów

• Przykład 1. Wzór trapezów

Dla $n = 1$ węzłami kwadratury są krańce przedziału $x_0 = a$, $x_1 = b$

Obliczamy współczynniki

$$A_0 = (b - a) \int_0^1 \frac{t-1}{0-1} dt = \frac{b-a}{2}$$

$$A_1 = (b - a) \int_0^1 \frac{t-0}{1-0} dt = \frac{b-a}{2}$$

Kwadratura Newtona-Cotesa dla $n = 1$ jest równa

$$Q(f) = I(L_1) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Otrzymaliśmy tzw. wzór trapezów

4. Oblicz metoda Newtona-Cotesa całkę z $\cos(2x)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

$$Q(f) = \frac{\pi}{4} * (\cos(0) + \cos(\frac{\pi}{2})) = \dots$$

Termin 2 - 2015

1. Podaj definicję ilorazów różnicowych funkcji f opartych na wielokrotnych węzłach dla różnych węzłów $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ o krotnościach odpowiednio i_{i+1}, \dots, x_{i+k} .

Ilorazy różnicowe def.

Definicja. Ilorazy różnicowe funkcji f oparte na wielokrotnych węzłach definiujemy jako zależności:

- dla i -krotnego węzła x_i

$$f[x_i, i] = \frac{f^{(i-1)}(x_i)}{(i-1)!}$$

- dla różnych węzłów $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ o krotnościach odpowiednio $i_i, i_{i+1}, \dots, i_{i+k}$

$$f[x_i, i_i; x_{i+1}, i_{i+1}; \dots; x_{i+k}, i_{i+k}] = \frac{f[x_i, i_i - 1; x_{i+1}, i_{i+1}; \dots; x_{i+k}, i_{i+k}] - f[x_i, i_i; x_{i+1}, i_{i+1}; \dots; x_{i+k}, i_{i+k} - 1]}{(x_{i+k} - x_i)}$$

Zakładamy, że istnieją pochodne $f^{(j)}(x_{i+m})$ dla $m = 0, 1, \dots, k$,
 $j = 0, 1, \dots, i_{i+m} - 1$.

2. Znajdź wielomian interpolacyjny Hermite'a w postaci Newtona, wiedząc o funkcji f , że: $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f'(2)=2$, $f''(2)=2$

SPRÓBUJE TO POTEM POLICZYĆ

3. Podaj ogólny schemat iteracyjnego znajdowania zer funkcji

Mamy daną funkcję $f(x)$. Szukamy takiego miejsca żeby $f(x)=0$.

Wybieramy punkt początkowy, obliczamy wartość w tym punkcie $f(x_n)$ a następnie szukamy kolejnego punktu $f(x_{n+1})$, żeby był bliżej miejsca zerowego. W poszukiwaniach tych wykorzystujemy poprzedni punkt

Ogólny schemat metod iteracyjnych

1. Przekształcamy równanie $f(x)=0$ do postaci
 $x=\phi(x)$
poprzez podstawienie
 $\phi(x)=x-g(x)f(x)$
gdzie g jest funkcją ciągłą i $g \neq 0$.
Punkt x^* taki, że równanie jest spełnione nazywa się $x=f(x)$ równania jest jego postacią „naturalną”;
prostej (przykład z mechaniki kwantowej: SCF)
2. Tworzymy ciąg kolejnych przybliżeń $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$,
że
 $x^{(p+1)}=\phi(x^{(p)})$
gdzie $x^{(0)}$ jest przybliżeniem początkowym. Ta
iteracyjną a funkcja ϕ *funkcją iteracyjną*.
3. Procedurę iteracyjną kończymy jeżeli kolejne p
mało (zbieżność) lub wykonaliśmy maksymalną
zbieżności).

4. Zdefiniuj metodę siecznych w odniesieniu do schematu z pkt 1

W metodzie newtona w każdej iteracji musimy obliczyć wartość funkcji i wartość pochodnej. Aby uniknąć obliczania pochodnej możemy wartość pochodnej zastąpić ilorazem różnicowym. Wzór na kolejne przybliżenie wtedy przyjmuje postać:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

5. Rozwiąż metodą z pkt 2 równanie $x + 2\ln(x) = 0$

Mamy równanie $f(x) = x^2 - 2$

Wybieramy przedział w którym będziemy szukać miejsca zerowego np. $x_1=0$ i $x_2=2$.

Podstawiamy do wzoru $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$

I tak aż do momentu aż otrzymamy punkt który uznamy za wystarczająco bliski rzeczywistej wartości miejsca zerowego.

$f(x) = x^2 - 2$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$x_3 = 2 - \frac{2-0}{2+2} \cdot 2$

$x_3 = 1$

$x_4 = 1 - \frac{1-2}{-1-2} \cdot (-1)$

$x_4 = \frac{4}{3}$

$x_5 = \frac{4}{3} - \frac{\frac{4}{3}-1}{-\frac{2}{9}+1} \cdot (-\frac{2}{9})$

$x_5 = \frac{10}{7} \approx 1,42857$

Robimy tą metodą ale mamy inne równanie

6. Oblicz metodą RK4 wartość $y(1)$ dla zagadnienia początkowego w postaci $y' = 2x + y$, $y(0) = 0$ z krokiem $h=0.25$.

POLICZE POTEM

7. Sformułuj zadanie interpolacji Hermite'a

Danych jest $k + 1$ różnych węzłów x_0, x_1, \dots, x_k oraz liczby naturalne m_0, m_1, \dots, m_k takie, że $\sum_{i=0}^k m_i = n + 1$. Zadanie interpolacyjne Hermite'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu H_n stopnia nie wyższego niż n , spełniającego warunki:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

8. Podaj schemat budowy dowolnej metody iteracyjnej rozwiązywania układów równań liniowych

Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych polegają na konstruowaniu ciągu przybliżeń wektora rozwiązań $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots$ określonego wzorem:

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + w, \quad i = 0, 1, \dots$$

gdzie M jest macierzą kwadratową a "w" jest wektorem.

Ogólny schemat obliczeń iteracyjnych przedstawia metoda iteracji prostych. Za jej pomocą można rozwiązać układ równań liniowych (o n niewiadomych).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Układ ten można zapisać w postaci $Ax=b$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

9. Na podstawie schematu z pkt 1 wyprowadź metodę Jacobięgo

Rozważamy układ $Ax=b$.

Przyjmijmy, że $A=L+D+U$, gdzie:

L-macierz poddiagonalna (trójkątna dolna),

D-macierz diagonalna,

U-macierz naddiagonalna (trójkątna górna)

Układ równań w postaci $Ax=b$ możemy zatem zapisać w postaci:

$$(L+D+U)x=b$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$Dx=-(L+U)x+b.$$

A więc:

$$x=-D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b.$$

Możemy więc skonstruować ciąg przybliżeń rozwiązania w postaci:

$$x_{i+1}=-D^{-1}(L+U)x_i+D^{-1}b.$$

Macierz D^{-1} powstaje poprzez podniesienie do potęgi -1 wszystkich wartości (elementów) na głównej przekątnej macierzy D.

W tego chyba nie trzeba ale wstawiam tak to:

Przy założeniu, że elementy główne macierzy A są różne od zera (czyli $a_{ii} \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$), należy przekształcić układ w taki sposób, aby wyznaczyć z pierwszego równania x_1 , z drugiego x_2 aż do x_n .

Dostajemy:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{(b_1 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n))}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{(b_2 - (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n))}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{(b_n - (a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}))}{a_{nn}} \end{cases}$$

10. Wyznacz macierz Jacobiego i przeprowadź dwa kroki przybliżające rozwiązanie zaczynając od wektora początkowego $\{2,2,2,2\}$ dla układu równań

- $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9$
- $2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_1 = 12$
- $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 15$
- $-3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9$

Obliczenia poniżej są dla wektora $\{1,1,2,2\}$

3) układ:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 15 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

wzrost:

$$x^{(i+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(i)} + D^{-1}b$$

$$x^{(1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(0)} + D^{-1}b$$

...

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L+U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(i+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_M x^{(i)} + \underbrace{D^{-1}b}_N \Rightarrow x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + Nb$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot x^0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N \cdot b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,5 \\ -4 \\ 7,5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4,5 \\ -4 \\ 7,5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -4\frac{2}{3} \\ 5,5 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = Mx^{(1)} + Nb$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -4\frac{2}{3} \\ 5\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\frac{1}{2} \\ -4 \\ 7\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{12} \\ -4\frac{2}{3} \\ -2\frac{15}{12} \\ -\frac{71}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\frac{1}{2} \\ -4 \\ 7\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{12} \\ -8\frac{2}{3} \\ -\frac{12,5}{12} \\ \frac{37}{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -4\frac{2}{3} \\ 5\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1^{\circ} 0 \cdot (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot (-4\frac{2}{3}) + \frac{3}{2} \cdot 5\frac{1}{2} + 0 \cdot 9 \\ 2^{\circ} \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 \cdot (-4\frac{2}{3}) + (-\frac{4}{3}) \cdot 5\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 9 \\ 3^{\circ} -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot (-4\frac{2}{3}) + 0 \cdot 5\frac{1}{2} + (-\frac{3}{2}) \cdot 9 \\ 4^{\circ} 3 \cdot (-\frac{1}{2}) + (-1) \cdot (-4\frac{2}{3}) + (-2) \cdot 5\frac{1}{2} + 0 \cdot 9 \end{cases}$$

$$1^{\circ} 0 + \frac{1}{2} \cdot (-4\frac{2}{3}) + \frac{3}{2} \cdot 5\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{14}{3}) + \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{2} = \frac{-7}{3} + \frac{33}{4} =$$

$$= \frac{-28 + 99}{12} = \frac{71}{12} = 5,91\bar{6}$$

$$2^{\circ} \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 + (-\frac{4}{3}) \cdot 5\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 9 = -\frac{1}{3} - \frac{22}{3} + 3 = \frac{-23}{3} + \frac{9}{3} =$$

$$= \frac{-14}{3} = -4\frac{2}{3} = -4,66\bar{6}$$

$$3^{\circ} -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) + (-4\frac{2}{3}) + 0 + (-\frac{3}{2}) \cdot 9 = \frac{1}{4} - \frac{14}{3} - \frac{27}{2} = \frac{3}{12} - \frac{56}{12} - \frac{162}{12} =$$

$$= \frac{-215}{12} = -17,91\bar{6}$$

$$4^{\circ} -\frac{3}{2} + 4\frac{2}{3} - \frac{22}{2} = \frac{-9}{6} + \frac{28}{6} - \frac{66}{6} = \frac{-47}{6} = -7,83\bar{3}$$

Oblikovane rješenje (prez kalkulator):

uže:

$$\begin{bmatrix} 5,93 \\ -4,66 \\ -17,91 \\ -7,84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{71}{12} \\ -4\frac{2}{3} \\ -\frac{215}{12} \\ -\frac{47}{6} \end{bmatrix}$$

11. Przedstaw metodę Eulera i jej modyfikacje

Metoda Eulera:

- wolno zbieżna
- opiera się na interpolacji geometrycznej równania różniczkowego

W metodzie Eulera schemat metody dany jest wzorem:

- $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$

Modyfikacje:

- metoda jest wtedy szybciej zbieżna
- zwiększają dwukrotnie koszt jednego kroku metody

- metoda Heuna (ulepszona metoda **Eulera**)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)))$$

- zmodyfikowana metoda **Eulera**

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(x_i, y_i))$$

- Metodę **Eulera** i jej modyfikacje można zapisać w postaci

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h) & x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \\ y_0 = y_a \end{cases} \quad (22)$$

z różnymi funkcjami $\Phi = \Phi_f(x, y; h)$

W metodzie **Eulera** $\Phi_f(x, y; h) = f(x, y)$

12. Oblicz wykorzystując metodą Eulera wartość funkcji w $y(1)$ dla zagadnienia początkowego postaci $y' = 4x + 2y$, $y(0) = 2$ z krokiem 0.25

$$y'(x) = 4x + 2y$$

$$y(0) = 2$$

$$x = 1 \rightarrow y(1) = ?$$

$$h = 0,25$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{array} \right\} \text{warunek początkowy}$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,25 = 0,25$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0,25(4 \cdot 0 + 2 \cdot 2) = 3$$

$$x_2 = x_1 + h = 0,25 + 0,25 = 0,5$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 3 + 0,25(0,25 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = 4,75$$

$$x_3 = x_2 + h = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 5 + 0,25(0,5 \cdot 4 + 2 \cdot 5) = 8$$

$$x_4 = x_3 + h = 0,75 + 0,25 = 1$$

$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 8 + 0,25(0,75 \cdot 4 + 8 \cdot 2) = 12,75$$

Termin 0 2015

Zad 1 SFORMUŁUJ ZASADĘ INTERPOLACJI LAGRANGE

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż n , którego wartości w $n + 1$ punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n$$

gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma jednoznaczne rozwiązanie, które można przedstawić w postaci:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

gdzie

$$l_i(x) \stackrel{df}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

l_i to wielomiany stopnia n takie, że

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

2. JAK MOŻNA OSZACOWAĆ BŁĄD INTERPOLACJI? PODAJ SENSOWNE TWIERDZENIE

- Reszta interpolacyjna r to

$$r(x) = f(x) - L_n(x)$$

- dokładna wartość funkcji f w punkcie x nie jest znana, dlatego korzystamy z twierdzenia
Istnieje punkt $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ taki, że

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} p_{n+1}(x)$$

przy czym zakładamy, że f ma ciągłą pochodną $(n+1)$. rzędu na przedziale $[a, b]$ zawierającym punkty x_0, x_1, \dots, x_n oraz x

3. OBLICZ BŁĄD POWSTAŁY PRZY OBLICZENIU PIERWIASKÓW Z LICZBY 7 PRZY WĘZŁACH W PUNKTACH 1, 4, 9

The image shows a handwritten calculation on grid paper. The formula is:
$$r(7) = \frac{\sqrt{\xi(x)}^{(3)}}{3!} (7-1) \cdot (7-4) \cdot (7-9) = \frac{\sqrt{\xi(x)}^{(3)}}{6} (-36) = -6 \sqrt{\xi(x)}^{(3)}$$

1. Podaj schemat budowy dowolnej metody iteracyjnej rozwiązywania układów równań liniowych.

Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych polegają na konstruowaniu ciągu przybliżeń wektora rozwiązań $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots$ określonego wzorem:

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + w, \quad i=0, 1, \dots$$

gdzie M jest macierzą kwadratową a " w " jest wektorem.

Ogólny schemat obliczeń iteracyjnych przedstawia metoda iteracji prostych. Za jej pomocą można rozwiązać układ równań liniowych (o n niewiadomych).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Układ ten można zapisać w postaci $Ax=b$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

2. Na podstawie schematu z pkt 1 wyprowadź metodę Jacobiego.

Rozważamy układ $Ax=b$.

Przyjmijmy, że $A=L+D+U$, gdzie:

L -macierz poddiagonalna (trójkątna dolna),

D -macierz diagonalna,

U -macierz naddiagonalna (trójkątna górna)

Układ równań w postaci $Ax=b$ możemy zatem zapisać w postaci:

$$(L+D+U)x=b$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$Dx=-(L+U)x+b.$$

A więc:

$$x=-D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b.$$

Możemy więc skonstruować ciąg przybliżeń rozwiązania w postaci:

$$x_{i+1} = -D^{-1}(L+U)x_i + D^{-1}b.$$

*Macierz D^{-1} powstaje poprzez podniesienie do potęgi -1 wszystkich wartości (elementów) na głównej przekątnej macierzy D.

//tego chyba nie trzeba ale wstawiam tak to:

Przy założeniu, że elementy główne macierzy A są różne od zera (czyli $a_{ii} \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$), należy przekształcić układ w taki sposób, aby wyznaczyć z pierwszego równania x_1 , z drugiego x_2 aż do x_n .
Dostajemy:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{(b_1 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n))}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{(b_2 - (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n))}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{(b_n - (a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}))}{a_{nn}} \end{cases}$$

3. Wyznacz macierz Jacobiego i przeprowadź dwa kroki przybliżające rozwiązanie

zaczynając od wektora początkowego {2.2.2.2} dla układu równań :

- $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9$
- $2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_1 = 12$
- $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 15$
- $-3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9$

3) utvrd:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 15 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

uziv:

$$x^{(i+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(i)} + D^{-1}b$$

$$x^{(1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(0)} + D^{-1}b$$

...

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L+U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(i+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_M x^{(i)} + \underbrace{D^{-1}b}_N \Rightarrow x^{(i+1)} = M x^{(i)} + N b$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot x^0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N \cdot b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,5 \\ -4 \\ 7,5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4,5 \\ -4 \\ 7,5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -4\frac{2}{3} \\ 5,5 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = M x^{(1)} + N \cdot b$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -4\frac{2}{3} \\ 5\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\frac{1}{2} \\ -4 \\ 7\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{12} \\ -4\frac{2}{3} \\ -2\frac{15}{12} \\ -\frac{41}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\frac{1}{2} \\ -4 \\ 7\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{12} \\ -8\frac{2}{3} \\ \frac{-12+17}{12} \\ \frac{37}{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -4\frac{2}{3} \\ 5\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^\circ 0 \cdot (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot (-4\frac{2}{3}) + \frac{3}{2} \cdot 5\frac{1}{2} + 0 \cdot 9 \\ 2^\circ \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 \cdot (-4\frac{2}{3}) + (-\frac{4}{3}) \cdot 5\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 9 \\ 3^\circ -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot (-4\frac{2}{3}) + 0 \cdot 5\frac{1}{2} + (-\frac{3}{2}) \cdot 9 \\ 4^\circ 3 \cdot (-\frac{1}{2}) + (-1) \cdot (-4\frac{2}{3}) + (-2) \cdot 5\frac{1}{2} + 0 \cdot 9 \end{bmatrix}$$

$$1^\circ 0 + \frac{1}{2} \cdot (-4\frac{2}{3}) + \frac{3}{2} \cdot 5\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{14}{3}) + \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{2} = \frac{-7}{3} + \frac{33}{4} = \frac{-28 + 99}{12} = \frac{71}{12} = 5,91\bar{6}$$

$$2^\circ \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 + (-\frac{4}{3}) \cdot 5\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 9 = -\frac{1}{3} - \frac{22}{3} + 3 = \frac{-23}{3} + \frac{9}{3} = \frac{-14}{3} = -4\frac{2}{3} = -4,66\bar{6}$$

$$3^\circ -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) + (-4\frac{2}{3}) + 0 + (-\frac{3}{2}) \cdot 9 = \frac{1}{4} - \frac{14}{3} - \frac{27}{2} = \frac{3}{12} - \frac{56}{12} - \frac{162}{12} = \frac{-215}{12} = -17,91\bar{6}$$

$$4^\circ -\frac{3}{2} + 4\frac{2}{3} - \frac{22}{2} = \frac{-9}{6} + \frac{28}{6} - \frac{66}{6} = \frac{-47}{6} = -7,83\bar{3}$$

Oblizane resenje i prez kalkulatu:

uzge:

$$\begin{bmatrix} 5,93 \\ -4,66 \\ -17,91 \\ -7,84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{71}{12} \\ -4\frac{2}{3} \\ -\frac{215}{12} \\ -\frac{47}{6} \end{bmatrix}$$

Całkowanie numeryczne . Zdefiniuj pojęcie kwadratury liniowej.

Kwadratura liniowa:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n_0} A_{i,0} f(x_{i,0}) + \sum_{i=1}^{n_1} A_{i,1} f'(x_{i,1}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} A_{i,k} f^{(k)}(x_{i,k})$$

$A_{i,j}$ - to współczynniki kwadratury,
 $x_{i,j}$ - to węzły kwadratury

Co to kwadratury Newtona Cotesa ? Jak wygląda ta kwadratura dla $n=2$ dla funkcji f , gdzie n to liczba węzłów

Kwadraturą Newtona-Cotesa przybliżającą $\int_a^b f(x) dx$ jest nazywana kwadratura postaci:

$$Q(f) = I(L_n)$$

gdzie L_n jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji f opartym na równoodległych węzłach $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = a + nh = b$

Dla $n = 2$ węzłami kwadratury są $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$
 Obliczamy współczynniki

$$A_0 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)} dt = \frac{b-a}{6}$$

$$A_1 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-0)(t-2)}{(1-0)(2-0)} dt = \frac{4(b-a)}{6}$$

$$A_2 = A_0$$

Otrzymaliśmy kwadraturę Newtona-Cotesa postaci

$$Q(f) = I(L_2) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

która nazywana jest wzorem parabol lub wzorem Simpsona

Oblicz metodą z pkt 2 całkę z $\sin(s)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

3. Oblicz metodą z pkt2 całkę z $\sin(x)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

$$Q(f) = \frac{\pi}{12} \cdot \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{12} \cdot (2\sqrt{2} + 1)$$

2018 termin 2

1. Podaj definicje aproksymacji Pade

$$r_{kl}(x) = \frac{p_k(x)}{q_l(x)} = \frac{a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + \dots + b_1 x + b_0} \quad (17)$$

Przybliżeniami Padego funkcji f są nazywane funkcje wymierne (17) tak konstruowane, aby przy danych k i l , w punkcie $x = 0$ wartości funkcji f i r_{kl} oraz możliwie wielu ich pochodnych były równe.

2. Wyznacz aproksymacje Pade

2) Wyznacz aproksymację Pade $r_{1,3}$:

$$r_{1,3} = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$

dla funkcji $f(x) = x^2 + e^x$ w punkcie $x = 0$.

3. Podaj twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania (założenie i tezę)

- Kiedy istnieje jedno rozwiązanie?

Twierdzenie

Jeżeli $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x dla $x \in [a, b]$ i spełnia warunek Lipschitza ze względu na y , tzn. istnieje stała L taka, że dla dowolnych rzeczywistych y_1, y_2 i dla każdego $x \in [a, b]$ jest spełniona nierówność

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (6)$$

to dla każdego skończonego y_a istnieje dokładnie jedna funkcja $y(x)$ ciągła i różniczkowalna na $[a, b]$ taka, że

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{oraz} \quad y(a) = y_a \quad (7)$$

4. Za pomocą siecznych rozwiązać równanie $f(x)=x^2-2$

Mamy równanie $f(x) = x^2 - 2$

Wybieramy przedział w którym będziemy szukać miejsca zerowego np. $x_1=0$ i $x_2=2$.

Podstawiamy do wzoru $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$

I tak aż do momentu aż otrzymamy punkt który uznamy za wystarczająco bliski rzeczywistej wartości miejsca zerowego.

Handwritten solution for finding the root of $f(x) = x^2 - 2$ using the secant method:

$$f(x) = x^2 - 2$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 2 - \frac{2-0}{2+2} \cdot 2$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 1 - \frac{1-2}{-1-2} \cdot (-1)$$
$$x_4 = \frac{4}{3}$$
$$x_5 = \frac{4}{3} - \frac{\frac{4}{3}-1}{-\frac{2}{9}+1} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$$
$$x_5 = \frac{10}{7} \approx 1,42857$$

***NIC Z TEGO
NIE WYNIKA
2016***

2014 T1

1. ZAD. 1

1.1. Dana jest liczba $13,73_{(10)}$. zapisz tę liczbę w znormalizowanym zapisie zmiennoprzecinkowym o podstawie 2

T1 2014 Z. 1.1.

$$x = 13,73_{(10)} \quad x_2 =$$

$$x = s \cdot 2^c \cdot m$$

13,73		1
6		0
3		1
1		1
0		

$$13_{(10)} \rightarrow 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \rightarrow c = 4 \quad s = 1$$

$$x = 1 \cdot 2^4 \cdot m \quad 13,73 = 16m \quad m = \frac{13,73}{16} = 0,858125$$

$$x = 1 \cdot 2^4 \cdot 0,858125$$

IEEE754

$$\downarrow \quad d = 31$$

$$t = 23 \quad d - t = 8$$

$$m_+ \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad C \in (-127, 128)$$

$$s \in \{0, 1\} \quad -1, 13$$

$$x_+ = s \cdot 2^c \cdot m_+$$

ALE TO CHYBA

BEZ TEGO

WIĘC ELO

- 1.2. Liczby stałoprzecinkowe. Pokaż, jak obliczyć błąd bezwzględny i względny rozwinięcia dwójkowego o 6 bitach ułamkowych dla liczby $0,4_{(10)}$.

2. 1.2

$x = 0,4_{(10)} \rightarrow$ musimy przekształcić do postaci dwójkowej

$x = 0 + 0,4$

↑ ↓
część część
całkowita ułamkowa

$0_{(10)} = 0_{(2)}$ $0,4_{(10)} = ?_{(2)} = m$

Do dyspozycji mamy 6 bitów, zatem: $m_+ = \sum_{i=1}^6 e_{-i} 2^{-i}$

Musimy znaleźć pierwsze 6 cyfr ułamka w postaci binarnej:

$$\begin{array}{c} 0,4 \\ 0,8 \\ 0,6 \\ 0,2 \\ 0,4 \\ 0,8 \\ 0,6 \end{array} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \left. \begin{array}{c} 2^{-1} \\ 2^{-2} \\ 2^{-3} \\ 2^{-4} \\ 2^{-5} \\ 2^{-6} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

pierwsze 6 wybr. wzmianka
 zatem $0,4 \approx 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-5} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-1}$

$x = 0,4$
 $x_+ = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{25}{64} = 0,390625$

BŁĄD BEZWZGLĘDNY
 $|x - x_+| = |0,4 - 0,390625| = 0,009375$

BŁĄD WZGLĘDNY
 $\left| \frac{x - x_+}{x} \right| = \left| \frac{0,4 - 0,390625}{0,4} \right| = \frac{0,009375}{0,4} = 0,0234375$

2. ZAD. 2

2.1. Zdefiniuj zadanie aproksymacji średniokwadratowej w przestrzeni $L^2_p[a,b]$ (???)

Zadanie aproksymacji średniokwadratowej w przestrzeni $L^2_p[a,b]$ polega na wyznaczeniu takiej funkcji g , która na przedziale $\langle a,b \rangle$ aproksymuje pewną funkcję f najlepiej (tj. z najmniejszym błędem średniokwadratowym) spośród wszystkich funkcji należących do pewnej wybranej podprzestrzeni zbioru funkcji $L^2_p[a,b]$ (np. ze zbioru wielomianów stopnia 1).

$L^2_p[a,b]$ jest to zbiór funkcji mierzalnych na $[a,b]$ i takich, że $\int_a^b f^2(x)p(x)dx < \infty$, gdzie $p(x)$ to pewna nieujemna, zerująca się na zbiorze miary zero funkcja zwana funkcją wagową, taka, że $\int_a^b p(x)dx < \infty$.

Jeżeli przyjmiemy następującą normę: $\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)p(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$ dla tego zbioru (przestrzeni), to będzie on przestrzenią liniową unormowaną. Naszym zadaniem jest znalezienie funkcji, dla której norma ta przyjmie najmniejszą wartość.

2.2. Podaj metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta i wykonaj ten algorytm dla bazy $\{1, x, x^2\}$.

W metodzie ortogonalizacji Grama-Schmidta układ ortogonalny definiujemy następująco:

$$g_1 = f_1$$

$$g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(f_i, g_j)}{(g_j, g_j)} g_j, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

gdzie jako iloczyn skalarny możemy przyjąć jeden z następujących, zależnie od tego czy badamy przedział $[a, b]$ (często jest to przedział $[-1, 1]$) czy zbiór punktów x_1, x_2, \dots, x_N :

$$(f_k, f_l) = \int_a^b f_k(x) f_l(x) p(x) dx, \quad k \neq l \text{ w przestrzeni } L_p^2[a, b]$$

$$(f_k, f_l) = \sum_{i=1}^N f_k(x_i) f_l(x_i) p(x_i), \quad k \neq l \text{ w przestrzeni } l_{p, N}^2$$

$$B = \{1, x, x^2\}$$

zob.:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

$$\langle a, b \rangle = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\rho(x) = 1$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = x$$

$$f_3 = x^2$$

$$g_1 = 1$$

$$g_2 = x - \frac{\int_{-1}^1 1 \cdot x \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} \cdot 1 = x - \frac{\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1}{x \Big|_{-1}^1} = x - \frac{0}{2} = x$$

$$g_3 = x^2 - \frac{\int_{-1}^1 1 \cdot x^2 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} - \frac{\int_{-1}^1 x \cdot x^2 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} x = x^2 - \frac{\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1}{x \Big|_{-1}^1} - \frac{\frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1}{\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1} x$$

$$g_3 = x^2 - \frac{0}{2} - \frac{0}{\frac{2}{3}} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$g_1 = 1$$

$$g_2 = x$$

$$g_3 = x^2 - \frac{1}{3}$$

3. ZAD. 3

3.1. Podaj algorytm eliminacji Gaussa rozwiązywania liniowych układów równań.

Wymiary macierzy: $n \times n+1$

Eliminacja Gaussa

MACIERZ AB:

$$\begin{array}{cccc} \diamond a_{00} & a_{01} & a_{02} & b_0 \\ \boxed{a_{10}} & a_{11} & a_{12} & b_1 \\ \boxed{a_{20}} & a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}$$

kolumna się zeruje

$$\begin{array}{cccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & b_0 \\ 0 & \diamond a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & \boxed{a_{21}^{(1)}} & a_{22}^{(1)} & b_2^{(1)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} a_{00} & a_{01} & a_{02} & b_0 \\ 0 & a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{22}^{(2)} & b_2^{(2)} \end{array}$$

eliminacja Gaussa

dla każdej wiersza prócz pierwszego

od każdego elementu odejmij

odpowiadający elem. z wiersza pierwszego

• □ / ◇ (x)

teraz „zawęż obszar”

i tak aż po ∞

teraz z dołu do góry

znajdujemy rozwiązania:

przebiecamy wszystkie a oprócz przekątnej
na prawo i dzielimy całość przez □.

procedure gauss (m, X, AB):

for $i \leftarrow 1$ step 1 to $m-1$ do
for $j \leftarrow i+1$ step 1 to m do
if $AB[i, i] = 0$ then endl;

$$m \leftarrow \frac{-AB[j, i]}{AB[i, i]}$$

for $k \leftarrow i$ step 1 to $m+1$ do
 $AB[j, k] \leftarrow AB[j, k] + m \cdot AB[i, k];$

$i \leftarrow m;$

while $i > 1$ do

$$s \leftarrow AB[i, m+1];$$

$j \leftarrow m;$

while $j > i$ do

$$s \leftarrow s - X[j] \cdot AB[i, j];$$

$$j \leftarrow j - 1;$$

$$X[i] \leftarrow \frac{s}{AB[i, i]}$$

$i \leftarrow i - 1;$

endl;

3.2. Podaj przykład układu źle uwarunkowanego dla tej metody i uzasadnij swój wybór.

Układ źle uwarunkowany:

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2.999 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2.999 \end{bmatrix}$$

Uzasadnienie: $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| =$

$$\left(\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right) \left(\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |\bar{a}_{ij}| \right) = ?$$

$\rightarrow \max_{1 \leq i \leq m}$

$$\|A\| = | -3 | \cdot | 2 | = 6$$

$$\|A^{-1}\| = | -1499,5 | \cdot | 1500 | = 2249250$$

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 13495500$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy jest BARDZO wysoki, w związku z czym nawet minimalne zaburzenie danych (błędów spowodowanych przez reprezentację danych w komputerze) może radykalnie zaburzyć wynik!

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 2,999 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$\det A = 5,998 - 6 = -0,002$$

$$\frac{1}{\det A} = -500$$

$$A^{-1} = -500 \begin{bmatrix} 2,999 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1499,5 & 1500 \\ 1000 & -1000 \end{bmatrix}$$

Ogólnie żeby uzasadnić że jakaś macierz jest źle uwarunkowana, obliczamy wskaźnik uwarunkowania, który powinien być możliwie najniższy - już wartości rzędu 1000 oznaczają naprawdę kiepsko uwarunkowany układ. W tym przykładzie mamy $\text{cond}(A) = 13495500$ **15 000** - na obrazku jest pomyłone sumowanie z mnożeniem.

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad \|X\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |x_{i,j}|$$

3.3. Rozwiąż podany przez siebie przykładowy układ równań podaną w pkt. 1 metodą.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2,999 & 0,999 \end{array} \right]$$

$$i=1 \quad j=2$$

$$m = -\frac{2}{2} = -1$$

$$a_{21} = 2 + (-1) \cdot 2 = 0$$

$$a_{22} = 2,999 + (-1) \cdot 3 = -0,001$$

$$a_{23} = 0,999 + (-1) \cdot 3 = -2,001$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -0,001 & -2,001 \end{array} \right]$$

$$x_2 = \frac{-2,001}{-0,001} = 2001$$

$$x_1 = \frac{3 - 3 \cdot (2001)}{2} = \frac{-6000}{2} = -3000$$

$$x = \begin{bmatrix} -3000 \\ 2001 \end{bmatrix}$$

2015 T0 A

1. ZAD. 1 A

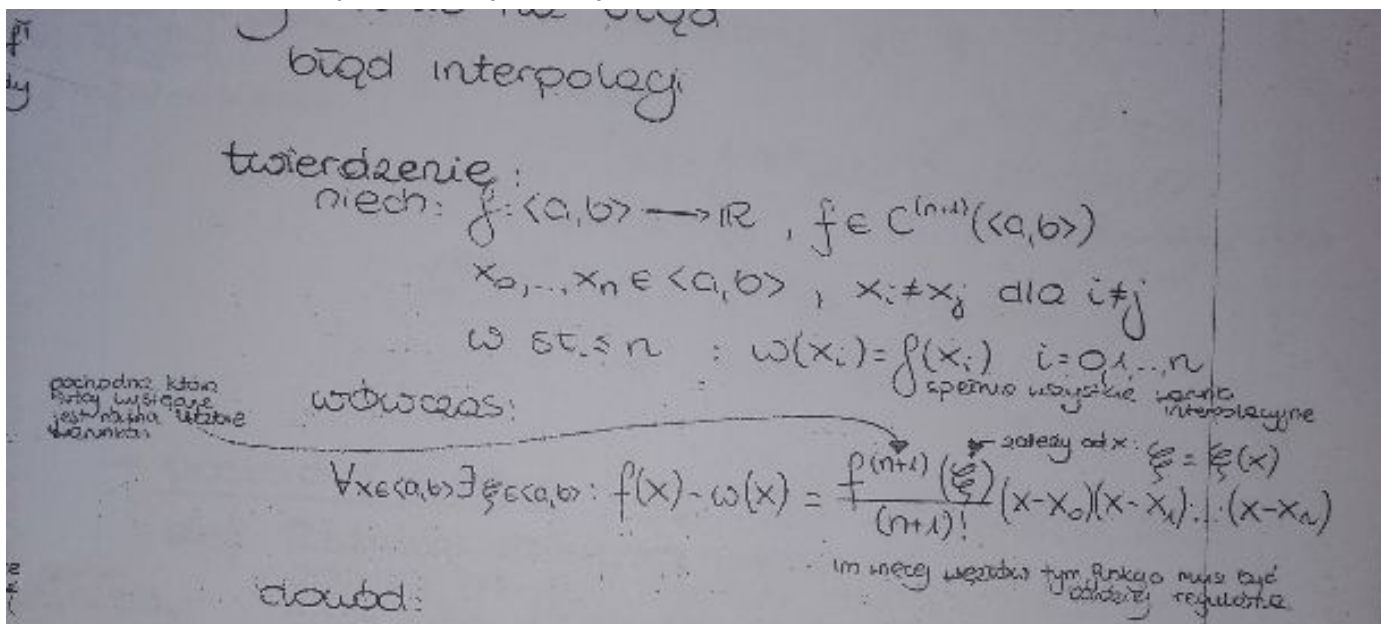
1.1. Sformułuj zasadę interpolacji Lagrange'a

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż n , którego wartości w $n + 1$ punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n$$

gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

1.2. Jak można oszacować błąd interpolacji? Podaj sensowne twierdzenie



Obliczyć błąd powstały przy obliczeniu pierwiastków z liczby 7 przy węzłach w punktach 1, 4, 9

Obliczamy pierwiastek z 7 za pomocą interpolacji Lagrange'a.

Najpierw ustalmy pewne punkty, dla których łatwo obliczyć pierwiastek. Trzeba to zrobić w taki sposób, aby 7 było w środku tego przedziału. Punktów musi być co najmniej 3. Im więcej ich będzie, tym oszacowanie będzie dokładniejsze.

x	f(x)
1	1
4	2
9	3

Na ich podstawie tworzymy z wzoru wielomian interpolacyjny Lagrange'a, a potem obliczamy jego wartość w punkcie 7.

$$L_2(x) = f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x_0-x_1} * \frac{(x-x_2)}{x_0-x_2} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{x_1-x_0} * \frac{(x-x_2)}{x_1-x_2} + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_2-x_0} * \frac{(x-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$L_2(7) = 1 \frac{(7-4)}{1-4} * \frac{(7-9)}{1-9} + 2 \frac{(7-1)}{4-1} * \frac{(7-9)}{4-9} + 3 \frac{(7-1)}{9-1} * \frac{(7-4)}{9-4} = -\frac{1}{4} + \frac{8}{5} + 3 * \frac{18}{40} = 2,7$$

Z jakim błędem możemy to wykonać?

W tym celu należy obliczyć wartość $r(x)$ z wzoru:

$$r(x) = f(x) - L_n(x)$$

Ponieważ wartości funkcji w dowolnym punkcie nie znamy, dlatego musimy się posłużyć odpowiednim twierdzeniem:

Jeżeli rzeczywista funkcja f ma ciągłą pochodną $(n+1)$ -ego rzędu na przedziale $[a, b]$ zawierającego węzły x_0 ,

x_1, \dots, x_n i punkt x (w którym liczymy wartość funkcji) to istnieje punkt $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ zależny od punktu x dla którego:

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} P_{n+1}(x)$$

2. ZAD. 2 A

2.1. Podaj schemat budowy dowolnej metody iteracyjnej rozwiązywania układów równań liniowych

Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych polegają na konstruowaniu ciągu przybliżeń wektora rozwiązań $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots$ określonego wzorem:

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + w \quad i=0,1,\dots$$

gdzie M jest pewną macierzą kwadratową, a w jest wektorem.

Ogólny schemat obliczeń iteracyjnych przedstawia metoda iteracji prostych. Za jej pomocą można rozwiązać układ równań liniowych (o n niewiadomych).

Układ ten można zapisać w postaci $Ax = b$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

przyjmując, że

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

2.2. Na podstawie schematu z pkt. 1 wyprowadź metodę Jacobiego

ZA CHUJ Z TEGO SCHEMATU NIE ZROBIE ALE NA OGÓŁ

Metoda Jacobiego jest metodą iteracyjną i pozwala nam obliczyć układ n równań z n niewiadomymi $Ax = b$. Wektor x^0 będący początkowym przybliżeniem rozwiązania układu będzie dany (zwykle przyjmuje się go jako wektor złożony z samych zer). Kolejne przybliżenia

$$x^{n+1} = Mx + Nb$$

będziemy obliczać według następującego wzoru:

gdzie $M = I - NA$, N jest pewną macierzą kwadratową, I to macierz jednostkowa (złożona z samych zer oprócz głównej przekątnej na której znajdują się jedynki). Macierz współczynników A rozłożymy na sumę trzech macierzy $A = L + D + U$, gdzie L jest macierzą w której znajdują się elementy których numer wiersza jest większy od numeru kolumny, D to macierz diagonalna z elementami tylko na głównej przekątnej, a U to macierz, w której znajdują się elementy których numery wiersza są mniejsze od numerów kolumny. Można to zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

W metodzie Jacobiego przyjmujemy, że $N=D^{-1}$, to wówczas $M = -D^{-1}(L+U)$. By zastosować tą metodę należy najpierw tak zamienić kolejność równań układu, aby na głównej przekątnej były elementy różne od zera. Macierz D^{-1} otrzymamy po podniesieniu do potęgi -1 wszystkich wartości na głównej przekątnej macierzy D . Metoda ta jest zbieżna dla dowolnego przybliżenia początkowego rozwiązania x^0 , jeśli promień spektralny $-D^{-1}(L+U)$ jest mniejszy od jeden (promień spektralny to największa wartość bezwzględna z wartości własnej macierzy). W przeciwnym wypadku nie dla każdego przybliżenia początkowego otrzymamy rozwiązanie układu.

2.3. Wyznacz macierz Jacobiego i przeprowadź dwa kroki przybliżające rozwiązanie zaczynając od wektora początkowego X_0 dla podanego układu równań (chyba takiego):

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

OGOLNIE TO kaziu nam dal taki fajny wzorek ktory daje odrazu rozwiazania:

$$x_k^{(i+1)} = \frac{-\sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} x_j^{(i)} + b_k}{a_{kk}}, \text{ dla } a_{kk} \neq 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

ale ze tutaj jest macierz to jest wiecej pierdolenia

1. Rozbijamy na macierz L D i U

Handwritten work showing the decomposition of a matrix into L, D, and U, and the calculation of D^{-1} and the iteration matrix M .

$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
 $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

OGÓLNE WZORY $M = I - NA$
 $N = D^{-1}$

$D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i tenże $M = -D^{-1}(L+U)$

$(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$-D^{-1} \cdot (L+U)$$

$$-\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1.5 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1.5 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x^{n+1} = Mx^n + Nb \quad N = D^{-1} \cdot |!$$

$$x_1^0 = 2 \quad x_2^0 = 2 \quad x_3^0 = 2 \quad x_4^0 = 2$$

$$x_1^1 = \frac{1}{2} x_2^0 + 1,5 x_3^0 + (-4,5)$$

$$x_1^1 = 1 + 3 - 4,5 = -0,5$$

$$x_2^1 = \frac{2}{3} x_1^0 - \frac{4}{3} x_3^0 + \frac{1}{3} x_4^0 + \left(-\frac{12}{3}\right)$$

$$x_2^1 = \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 - 4$$

$$x_2^1 = -4\frac{2}{3}$$

$$x_3^1 = -\frac{1}{2} x_1^0 + 1 x_2^0 + \left(-\frac{3}{2}\right) x_4^0 + 7,5$$

$$x_3^1 = -1 + 2 - \frac{6}{2} + 7,5 = 5,5$$

$$x_4^1 = 3 x_1^0 - 1 x_2^0 - 2 x_3^0 + 9$$

$$x_4^1 = 6 - 2 - 4 + 9 = 9$$

PIERWSZA ITERACJA $x \begin{bmatrix} -0,5 \\ -4\frac{2}{3} \\ 5,5 \\ 9 \end{bmatrix}$

DRUGA ITERACJA

$$x_1^2 = \frac{1}{2} x_2^1 + 1,5 x_3^1 + (-4,5)$$

$$x_2^2 = \frac{2}{3} x_1^1 - \frac{4}{3} x_3^1 + \frac{1}{3} x_4^1 + \left(-\frac{12}{3}\right)$$

UWAGA NA WNIPEKSY BÓRNE

$$x_3^2 = -\frac{1}{2} x_1^1 + 1 x_2^1 + \left(-\frac{3}{2}\right) x_4^1 + 7,5$$

$$x_4^2 = 3 x_1^1 - 1 x_2^1 - 2 x_3^1 + 9$$

3. ZAD. 3 A

3.1. Całkowanie numeryczne. zdefiniuj pojęcie kwadratury liniowej.

Zadanie przybliżonego obliczania całek to aproksymacja funkcjonału I innymi, prostszymi do obliczania funkcjonałami. W praktyce znamy funkcję podcałkową f i ewentualnie jej kolejne pochodne. Wobec tego całka $\int_a^b f(x)dx$ przybliżana jest funkcjonałami Q postaci:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n_0} A_{i,0} f(x_{i,0}) + \sum_{i=1}^{n_1} A_{i,1} f'(x_{i,1}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} A_{i,k} f^{(k)}(x_{i,k}) \quad (2)$$

Funkcjonał Q to kwadratura liniowa, współczynniki $A_{i,j}$ to współczynniki kwadratury, punkty $x_{i,j}$ to węzły kwadratury

+

- 3.2. Co to kwadratury Newtona-Cotesa? Jak wygląda ta kwadratura dla $n=2$ dla funkcji f , gdzie n to liczba węzłów

Kwadratura Newtona-Cotesa

Kwadraturę Newtona-Cotesa przybliżającą $\int_a^b f(x)dx$ jest nazywana kwadratura postaci:

$$Q(f) = I(L_n)$$

gdzie L_n jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji f opartym na równoodległych węzłach $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = a + nh = b$

Dla $n = 2$ węzłami kwadratury są $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$
Obliczamy współczynniki

$$A_0 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)} dt = \frac{b-a}{6}$$

$$A_1 = \frac{b-a}{2} \int_0^2 \frac{(t-0)(t-2)}{(1-0)(2-0)} dt = \frac{4(b-a)}{6}$$

$$A_2 = A_0$$

Otrzymaliśmy kwadraturę Newtona-Cotesa postaci

$$Q(f) = I(L_2) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

która nazywana jest wzorem parabol lub wzorem Simpsona

- 3.3. Oblicz metodą z pkt. 2 całkę z $\sin(x)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

WZOR KAZIA

H=b-a/N gdzie **a** początek przedziału w tym wypadku 0 ,**b** koniec przedziału w tym wypadku $\pi/2$ a **N** to dokładność no tutaj była dowolność ale powiedzmy 10 ogólnie to SIMPSON dla **N** parzystego!!

S(f)=H/3*(f₀*f_n)+4(f₁+f₃+...f_{n-1})+2(f₂+f₄+...f_{n-2}) -a więc zaczynamy ze $f_0=f(0)$ gdzie $f=\sin(x)$ i $f_n=f(\pi/2)$
 $f_1(x_1)=f(0+H)$; $f_2=f(x_1+H)$ i tak aż skończysz iterować do $x=\pi/2$

(JAK KTOS NIE ROZUMIE TO WYTLUMACZE)

2015 T0 B

1. ZAD. 1 B

1.1. Sformułuj zadanie interpolacji Lagrange'a dla węzłów równoodległych.

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż n , którego wartości w $n + 1$ punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n$$

gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Często węzły interpolacyjne są równoodległe (i rzeczywiste):

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n$$

gdzie h to stała długość kroku. Wielomian Lagrange'a ma teraz postać:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-j}{i-j}$$

Dla $x = x_0 + th$ postać wielomianów p_k jest następująca:

$$p_k(x) = p_k(x_0 + th) = h^k \prod_{i=0}^{k-1} (t - i)$$

1.2. Zdefiniuj postać Newtona wielomianu dowolnego stopnia dla dowolnych węzłów.

$$w(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$$

gdzie:

$$p_0(x) \stackrel{df}{=} 1$$

$$p_k(x) \stackrel{df}{=} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n$$

a x_0, x_1, \dots, x_n są danymi liczbowymi.

Wielomiany p_k ($k = 0, 1, \dots, n$) tworzą bazę przestrzeni W_n wielomianów stopnia nie wyższego niż n

Współczynniki b_k nazywane są ilorazami różnicowymi funkcji $f(x)$ opartymi na węzłach x_0, x_1, \dots, x_k .

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)}$$

1.3. Przedstaw wielomian $W(x) = 3x^2 - 5x + 6$ w postaci Newtona dla punktów 0, 1, 3.

1.3. $W(x) = 3x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} f(0) = 6 \\ f(1) = 3 - 5 + 6 = 4 \\ f(3) = 27 - 15 + 6 = 18 \end{array}$$
$$p_0(x) = 1$$
$$p_1(x) = (x - x_0) = x$$
$$p_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x(x - 1)$$
$$b_0 = f(x_0) = W(0) = 6$$
$$b_1 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)} = \frac{6}{-1} + \frac{4}{1} = -2$$
$$b_2 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$
$$= \frac{6}{-1(-3)} + \frac{4}{1(1-3)} + \frac{18}{3(3-1)} = 2 - 2 + 3 = 3$$
$$W(x) = 6 - 2x + 3x(x - 1)$$

ZAD. 2 B

2.1. Przedstaw ogólny schemat budowy dowolnej metody iteracyjnej rozwiązywania układów równań liniowych.

Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych polegają na konstruowaniu ciągu przybliżeń wektora rozwiązań $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots$ określonego wzorem:

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + w \quad i=0,1,\dots$$

gdzie M jest pewną macierzą kwadratową, a w jest wektorem.

Ogólny schemat obliczeń iteracyjnych przedstawia metoda iteracji prostych. Za jej pomocą można rozwiązać układ równań liniowych (o n niewiadomych).

Układ ten można zapisać w postaci $Ax = b$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

przyjmując, że

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

2.2. Na podstawie schematu z pkt.1 wyprowadź metodę Gaussa-Seidla.

W metodzie tej macierz A przedstawia się w postaci:

$$A = L + D + U,$$

gdzie D – macierz diagonalna, L - macierz trójkątna dolna, zaś U – macierz trójkątna górna.

Wtedy układ równań $Ax = b$ można przedstawić w postaci:

$$(D+L)x = -Ux + b$$

Dlatego proces iteracyjny można zapisać w postaci:

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} Ux^{(k)} + (D+L)^{-1} b$$

Równoważna postać tego procesu to

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz iteracji $k = 0, 1, \dots$.

2.3. Wyznacz macierz Gaussa-Seidla i przeprowadź dwa kroki przybliżające rozwiązanie zaczynając od wektora początkowego X_0 dla układu równań postaci:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$A = L + D + U$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 1 & | & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & | & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot b$$

$$-(D+L)^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 8 \\ -\frac{1}{4} \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$-(D+L)^{-1} \cdot U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 8 \\ -\frac{1}{4} \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{13}{3} \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 8 \\ -\frac{1}{4} \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{22}{3} \\ -\frac{49}{12} \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{22}{3} \\ -\frac{49}{12} \\ 23 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 8 \\ -\frac{1}{4} \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 8 \\ -\frac{1}{4} \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} -686 \\ -68 \\ -1093 \\ 628 \end{bmatrix}$$

Obliczone wg wzoru. Nie wiadomo o co w tym chodzi

ZAD. 3 B

3.1. Całkowanie numeryczne. Zdefiniuj pojęcie kwadratury liniowej.

• Zadanie przybliżonego obliczania całek to aproksymacja funkcjonału I innymi, prostszymi do obliczania funkcjonałami. W praktyce znamy funkcję podcałkową f i ewentualnie jej kolejne pochodne. Wobec tego całka $\int_a^b f(x)dx$ przybliżana jest funkcjonałami Q postaci:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n_0} A_{i,0} f(x_{i,0}) + \sum_{i=1}^{n_1} A_{i,1} f'(x_{i,1}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} A_{i,k} f^{(k)}(x_{i,k}) \quad (2)$$

Funkcjonał Q to *kwadratura liniowa*,
współczynniki $A_{i,j}$ to *współczynniki kwadratury*,
punkty $x_{i,j}$ to *węzły kwadratury*

3.2. Co to są kwadratury Newtona-Cotesa? Jak wygląda ta kwadratura dla $n = 1$ dla funkcji f , gdzie n to kwadratury (Uwaga: dla $n = 1$ węzłami kwadratury są krańce przedziału).

Kwadratura Newtona-Cotesa

Kwadraturą Newtona-Cotesa przybliżającą $\int_a^b f(x)dx$ jest nazywana kwadratura postaci:

$$Q(f) = I(L_n)$$

gdzie L_n jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji f opartym na równoodległych węzłach $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = a + nh = b$

• Przykład 1. Wzór trapezów

Dla $n = 1$ węzłami kwadratury są krańce przedziału $x_0 = a, x_1 = b$
Obliczamy współczynniki

$$A_0 = (b-a) \int_0^1 \frac{t-1}{0-1} dt = \frac{b-a}{2}$$
$$A_1 = (b-a) \int_0^1 \frac{t-0}{1-0} dt = \frac{b-a}{2}$$

Kwadratura Newtona-Cotesa dla $n = 1$ jest równa

$$Q(f) = I(L_1) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Otrzymaliśmy tzw. wzór trapezów

3.3. Oblicz metodą z pkt. 2 całkę z $\sin(x)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

Handwritten calculation on a grid background:

$$Q(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \quad \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$$
$$Q(\sin x) = \frac{\pi/2 - 0}{2} (\sin(0) + \sin(\pi/2)) = \frac{\pi}{4} (0 + 1) = \frac{\pi}{4}$$

1.1. Sformułuj zadanie interpolacji Hermite'a.

Zadanie interpolacji Hermite'a polega na znalezieniu danej funkcji f wielomianu H_n stopnia mniejszego lub równego n , takiego że

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad \text{dla } i=0,1,\dots,k; \quad j=0,1,\dots,m_i-1$$

przy czym

$$\sum_{i=0}^k m_i = n+1; \quad m_i \in \mathbb{N}$$

Liczba m_i nazywamy wrotnością węzła x_i

1.2. Znajdź wielomian interpolacyjny Hermite'a w postaci Newtona, wiedząc o funkcji f , że:
 $f(2) = 1, f'(2) = 2, f''(2) = 0, f(3) = 1, f'(3) = 2$

Wzory na żółto.

i	0	1
x_i	2	3

m_i	3	2	-	$\rightarrow 3+2=5$, więc wielomian będzie stopnia co najwyżej 4
$f(x_i)$	1	1	-	
$f'(x_i)$	2	2	-	
$f''(x_i)$	0	-	-	

$s(i) = \begin{cases} 0; & i=0 \\ m_0+m_1+\dots+m_{i-1}; & i>0 \end{cases} \quad m_0=3; \quad m_1=2$

$s(0) = 0$

$s(1) = 3 = 3$

$i=0 \rightarrow j=0 \rightarrow L=0$

$i=1 \rightarrow j=0,1 \rightarrow L=5+0=5; \quad L=6$

$p_{s(i)+j}(x) = (x-x_0)^{m_0} (x-x_1)^{m_1} \dots (x-x_{i-1})^{m_{i-1}} (x-x_i)^j$

$$p_{sc0}(x) = 1$$

$$p_{sc1}(x) = (x-x_0)^3 (x-x_1)^1 = x-x_1$$

$$p_i(x) = p_{scij}(x) = p_{scj}(x) (x-x_i)^j$$

$$b_l \quad (l=0,1,2,3,4)$$

b_0 - wyraz wolny

$$H_n(x) = b_0 p_0(x) + W_2(x)$$

$$b_l = \frac{f^{(j)}(x_i) - W_l^{(j)}(x_i)}{p_{scj}(x_i) \cdot j!}$$

$$(l=0, i=0, j=0) \quad b_0 = \frac{f(x_0)}{p_{sc0}(x_0) \cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1; \quad W_1(x) = b_0 \cdot p_0(x) = 1$$

$$(l=1, i=1, j=0) \quad b_1 = \frac{f(x_1) - W_1(x_1)}{p_{sc1}(x_1) \cdot 0!} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$W_2(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) = 1$$

$$(l=2, i=1, j=1) \quad b_2 = \frac{f'(x_1) - W_2'(x_1)}{p_{sc1}(x_1) \cdot 1!} = \frac{2-0}{1} = 2$$

~~0-2-0-0~~

~~$$W_2(x) = 1 + 2(x-x_1)^3(x-x_2)$$~~

$$H_l(x) = \sum_{l=0} b_l p_l(x) \Rightarrow$$

$$H(x) = 1 + 2(x-2)^3(x-3)$$

2. ZAD. 2

2.1. Podaj ogólny schemat metod iteracyjnego znajdowania zer funkcji.

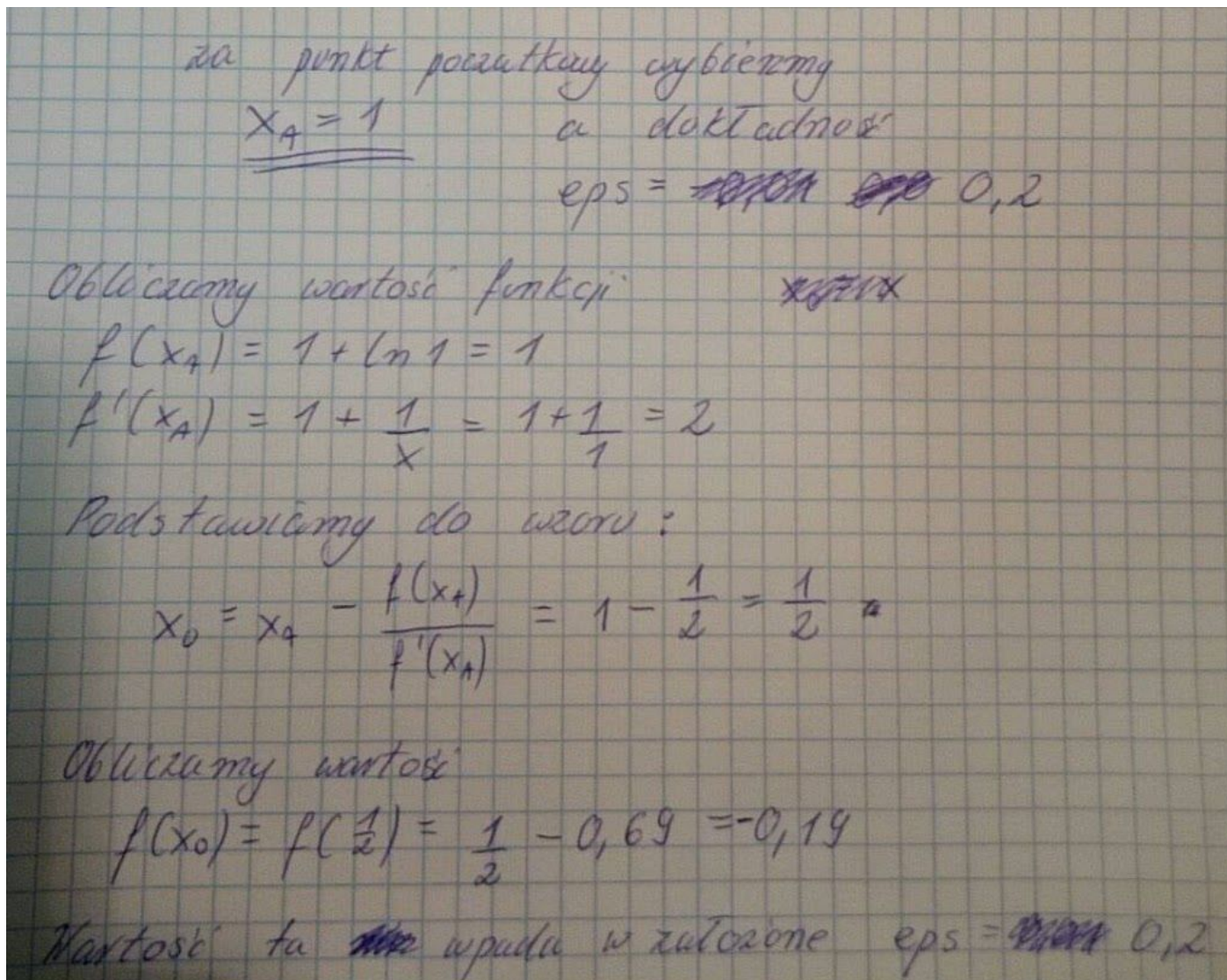
Ogólny schemat iteracyjnego znajdowania zer polega na obliczaniu odpowiednich wartości za pomocą podanego wzoru, następnie użycia odpowiedniej metody numerycznej. Po każdej takiej operacji w zależności od wyniku następuje zmiana zakresu, którego używamy. Iteracja związana jest z ilością wykonanych powtórzeń, aby dojść do odpowiedniej dokładności.

2.2. Zdefiniuj metodę stycznych w odniesieniu do schematu z pkt.1.

Metoda stycznych (zwana również **metodą Newtona**) różni się nieco od opisanych dotychczas metod wyznaczania pierwiastka funkcji. W metodzie tej nie określamy przedziału poszukiwań, lecz punkt na osi x dostatecznie blisko pierwiastka funkcji, który oznaczymy x_A . Następnie znajdujemy prostą styczną do wykresu funkcji w tym punkcie. Prosta ta przecina oś x i wyznacza nam kolejny punkt, który obliczamy wg wzoru:

$$x_0 = x_A - (f(x_A) / f'(x_A))$$

2.3. Rozwiąż metodą z pkt.2 równanie $x + \ln(x) = 0$



Gdyby wartość nie mieściła się w przyjętym przedziale eps to za x_A przyjmujemy obliczonego x_0 i liczymy od nowa wszystko tak samo :)

3. ZAD. 3

3.1. Zdefiniuj zagadnienie początkowe Cauchy'ego

Zagadnienie Cauchy'ego (zagadnienie początkowe) – zagadnienie polegające na znalezieniu konkretnej funkcji spełniającej dane **równanie różniczkowe** i **warunek początkowy**. W przypadku równania stopnia pierwszego, warunkiem początkowym będzie punkt, przez który powinien przechodzić wykres szukanej funkcji. W przypadku równania stopnia drugiego, zagadnienie początkowe zawierać będzie dodatkowo wartość pierwszej pochodnej w danym punkcie i analogicznie, w przypadku równań wyższego stopnia.

3.2. Podaj definicję metod różnicowych jednokrokowych

- **Metody jednokrokowe.** Konstruują ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ zgodnie ze wzorem

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h), & i = 0, 1, \dots, N \\ y_0 = y_a \end{cases} \quad (9)$$

gdzie funkcja $\Phi = \Phi_f$ może zależeć od f nieliniowo

- 3.3. Oblicz, wykorzystując metodę Rungego-Kutty IV rzędu, wartość funkcji w $y(1)$ dla zagadnienia początkowego postaci $y' = 2x + y, y(0) = 0$ z krokiem $h=0,25$.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad n = 0, 1, \dots$$

gdzie:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$\begin{cases} y' = 2x + 4 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad h = 0,25 \quad y(1) = ? \rightarrow x = 1$$

1) $x_0 = 0 \quad y_0 = 0$

$$k_1 = 0,25 \cdot [2 \cdot 0 + 0] = 0$$

$$k_2 = 0,25 \cdot \left[2 \cdot \left(0 + \frac{0,25}{2} \right) + \left(0 + \frac{1 \cdot 0}{2} \right) \right] = 0,0625$$

$$k_3 = 0,25 \cdot \left[2 \cdot \left(0 + \frac{0,25}{2} \right) + \left(0 + \frac{1 \cdot 0,0625}{2} \right) \right] = 0,07$$

$$k_4 = 0,25 \cdot [2 \cdot (0 + 0,25) + (0 + 0,07)] = 0,14$$

$$x_1 = 0,25$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{6} (0 + 2 \cdot 0,0625 + 2 \cdot 0,07 + 0,14) = 0,067$$

$$y_1 = 0,067$$

2) $x_1 = 0,25 \quad y_1 = 0,067$

$$k_1 = 0,25 [2 \cdot 0,25 + 0,067] = 0,14$$

$$k_2 = 0,25 \left[2 \cdot \left(0,25 + \frac{0,25}{2} \right) + \left(0,067 + \frac{1 \cdot 0,14}{2} \right) \right] = 0,22$$

$$k_3 = 0,25 \left[2 \cdot \left(0,25 + \frac{0,25}{2} \right) + \left(0,067 + \frac{1 \cdot 0,22}{2} \right) \right] = 0,23$$

$$k_4 = 0,25 [2 \cdot (0,25 + 0,25) + (0,067 + 0,23)] = 0,32$$

$$x_2 = 0,5 \quad y_2 = 0,067 + \frac{1}{6} (0,14 + 2 \cdot 0,22 + 2 \cdot 0,23 + 0,32) = 0$$

3) $x_2 = 0,5 \quad y_2 = 0,29$

i liczymy dalej tak samo. x zwiększamy o $h = 0,25$
aż wypnie się $x = 1$ i wtedy y_4 - to wynik

2015 T2

1. ZAD. 1 A

- 1.1. Podaj definicję ilorazów różnicowych funkcji f opartych na wielokrotnych węzłach dla różnych węzłów $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ o krotnościach odpowiednio i_{i+1}, \dots, i_{i+k} .

wielokrotny:

$$f[x_i, m_i] = \frac{f^{(m_i-1)}(x_i)}{(m_i-1)!}$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f[x_i, m_i, x_{i+1}, m_{i+1}, \dots, x_{i+k}, m_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, m_{i+1}, \dots, x_{i+k}, m_{i+k}] - f[x_i, m_i, \dots, x_{i+k}, m_{i+k}]}{x_{i+k} - x_i}$$

- 1.2. Znajdź wielomian interpolacyjny Hermite'a w postaci Newtona, wiedząc o funkcji f , że: $f(1) = 4, f(2) = 2, f'(2) = 2, f''(2) = 2$.

2. ZAD. 2 A

- 2.1. Podaj ogólny schemat metod iteracyjnego znajdowania zer funkcji.

2015 T1

- 2.2. Zdefiniuj metodę siecznych w odniesieniu do schematu z pkt. 1.

Metoda siecznych

W metodzie newtona w każdej iteracji musimy obliczyć wartość funkcji i wartość pochodnej. Aby uniknąć obliczania pochodnej możemy wartość pochodnej zastąpić ilorazem różnicowym. Wzór na kolejne przybliżenie wtedy przyjmuje postać:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

$$x_1 = (a - f(a)) * \frac{b - a}{f(b) - f(a)}; f(a) * f(x_1) < 0 \rightarrow [a, x_1]; f(a) * f(x_1) \geq 0 \rightarrow [x_1, b]$$

(to jest to..?) TAK. Jak to wyedytować?

Tak było u Byrskiej w pdf

- 2.3. Rozwiąż metodą z pkt. 2 równanie $x + 2\ln x = 0$.

$$x + 2 \ln x = 0$$

$$a, b \\ [1, e]$$

dokładność' = ~~0,1~~
0,1

$$f(1) = 1$$

$$f(e) = 3,72$$

$$* \quad x_1 = \left(1 - 1 \cdot \frac{e-1}{3,72-1} \right) = 0,37$$

$$f(a) \cdot f(x_1) = 1 \cdot f(0,37) = -1,62 < 0 \rightarrow [a, x_1]$$

$$* \quad x_2 = 1 - 1 \cdot \frac{0,37-1}{-1,62-1} = 0,76$$

$$f(x_2) = f(0,76) = 0,21$$

$$f(a) \cdot f(x_2) = 1 \cdot 0,21 > 0 \rightarrow [x_2, b]$$

$[0,76, 0,37]$

$$x_3 = 0,76 - 0,21 \cdot \frac{0,37-0,76}{-1,62-0,21} = 0,71$$

$$\underline{f(0,71) = 0,02}$$

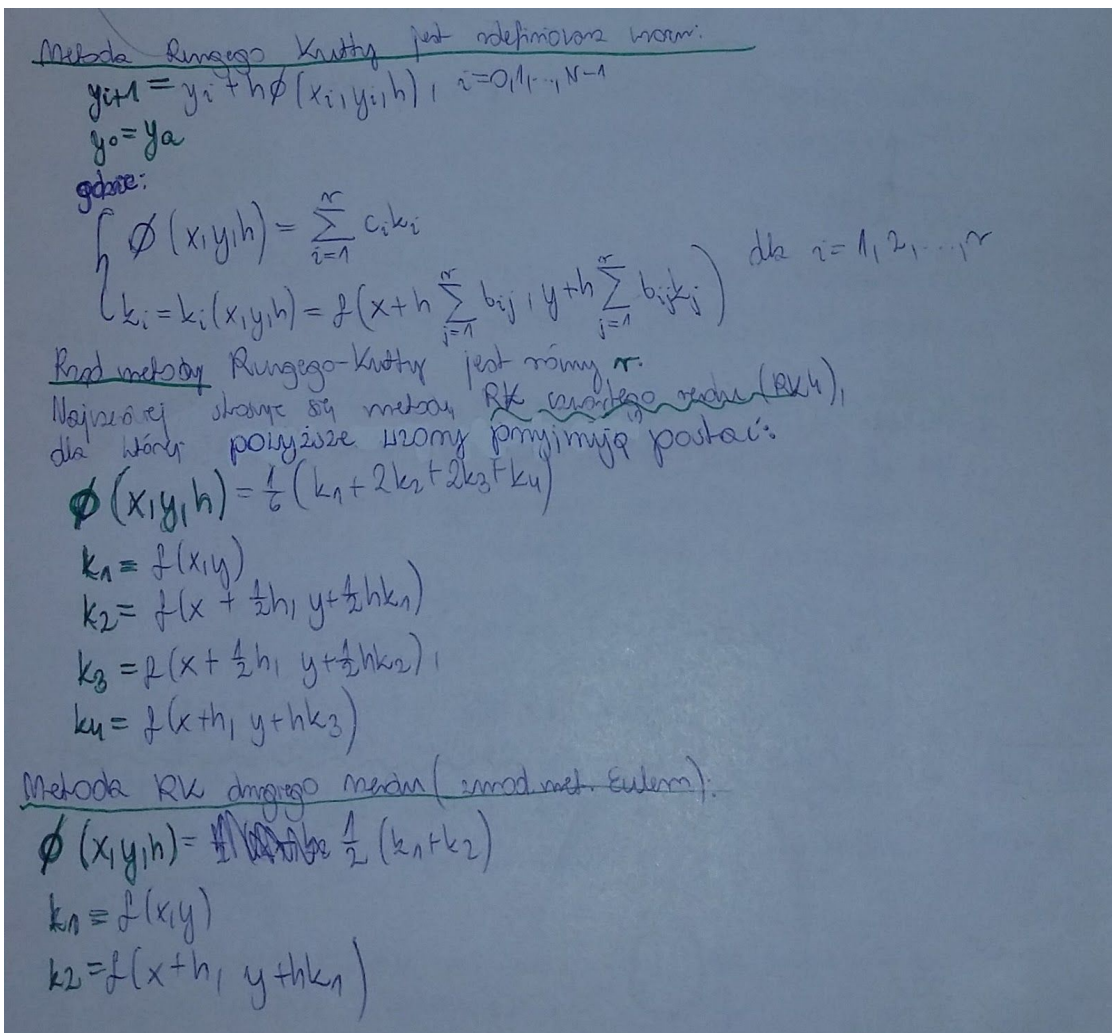
trafienie
miejscem zerowym w
przedziale $-0,1 < f(x) < 0,1$
jest $x = 0,71$

3. ZAD. 3 A

3.1. Zdefiniuj zagadnienie początkowe Cauchy'ego.

PATRZ NIŻEJ

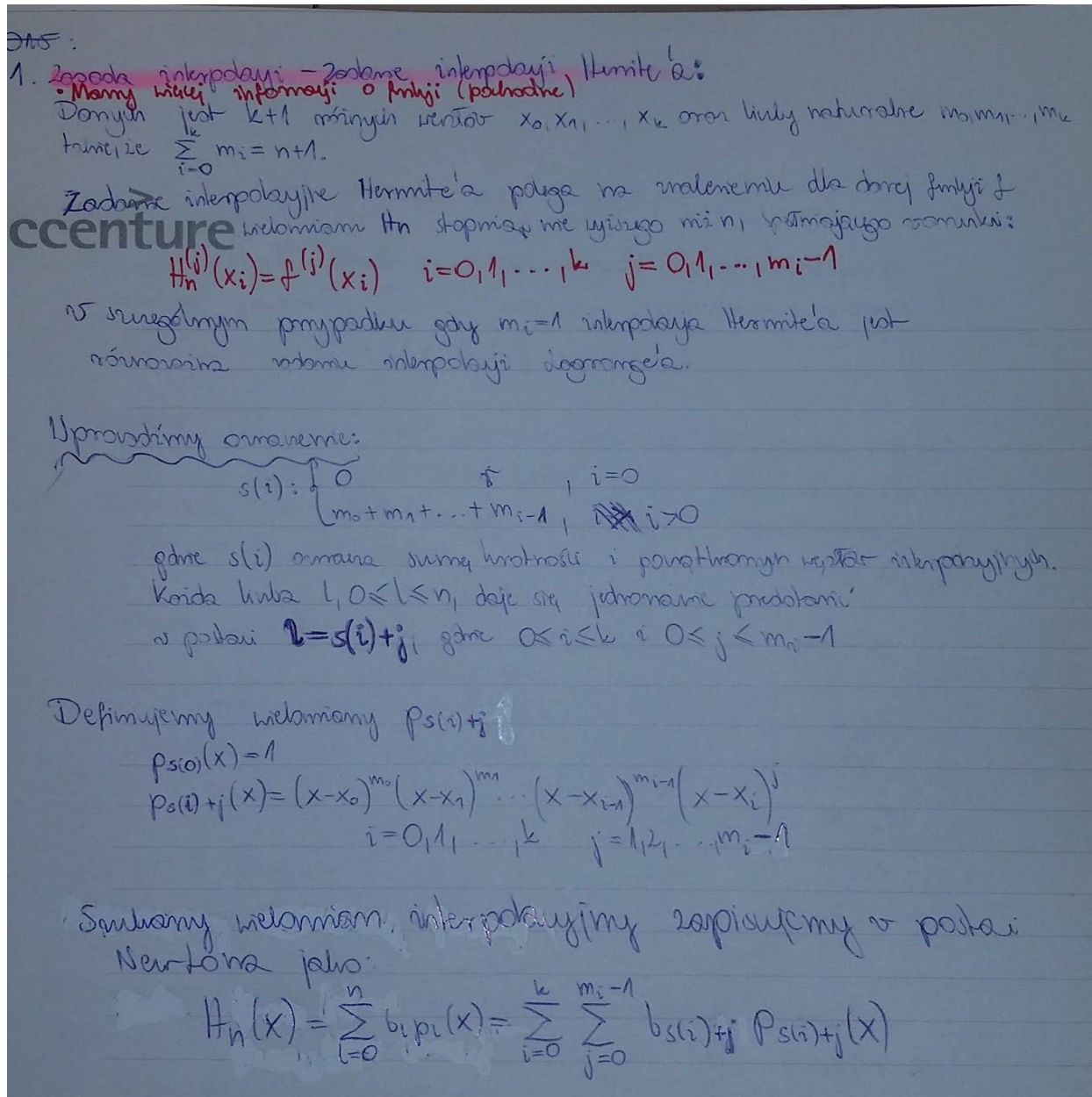
3.2. Przedstaw metodę Rungego-Kutty IV rzędu.



3.3. Oblicz, wykorzystując metodą Rungego-Kutty IV rzędu, wartość funkcji w $y(1)$ dla zagadnienia początkowego postaci $y' = 2x + y$, $y(0) = 0$ z krokiem $h = 0.25$.

// Gajek Pozdrawia, obliczyłem to na stronie wyżej tj. T1 2015 zad 3:)

1. **ZAD 1 B**
- 1.1. Sformułuj zadanie interpolacji Hermite'a.
 Kocham ten przedmiot za to, że sami sobie możemy zadania definiować //Tomasz
 I sami siebie na tym przedmiocie upierdolić //Szymon
 <3 // WHITEAG
 Łajtak wciskasz tych serduszków jak mrówek a ludzie się uczą, a jak Ci mówimy że miłości Ci
 brakuje a Grzesiek B. smuta to niee
 EHHH :(



1.2. **Znajdź wielomian interpolacyjny Hermite'a w postaci Newtona, wiedząc o funkcji f , że:**
 $f(3) = 1, f'(3) = 3, f''(3) = 0, f(5) = 1, f'(5) = 3.$

KTOŚ COŚ?

//Gajek znów pozdrawia, obliczyłem to w T1 2015 :D

2. ZAD 2 B

- 2.1. Przedstaw ogólny schemat budowy dowolnej metody iteracyjnej rozwiązywania układów równań liniowych
0, 2015 zad 2
- 2.2. Na podstawie schematu z pkt. 1 wyprowadź metodę Jacobiego
- 2.3. Wyznacz macierz Jacobiego i przeprowadź dwa kroki przybliżające rozwiązanie zaczynając od wektora początkowego $[1, 1, 2, 2]$ dla podanego układu równań postaci:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 15 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \end{cases} \quad \text{inaczej zapisane: } \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. ZAD 3 B

3.1. Zdefiniuj zagadnienie początkowe Cauchy'ego

Zagadnienie pocz. Cauchy'ego:

Równanie różniczkowe zwykłe pierwszego rzędu to równanie postaci:
 $y'(x) = f(x, y(x))$, dla $x \in [a, b]$

> Rozwiązanie takiego równania nie jest jednoznaczne. W samej istocie jest to równanie z funkcją f , która nie jest ściśle określona.

...> Dlatego, aby równanie różniczkowe miało rozwiązanie jednoznaczne potrzebujemy warunków początkowych:
 $y(a) = y_a$ **NEED!**

Zagadnienie tej postaci nazywamy zagadnieniem Cauchy'ego:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

~~Rozwiązanie~~ Ten układ równań może mieć jedno, wiele rozwiązań lub być sprzeczny.

- Najczęściej... rozwiązaniem zadania początkowego tymczasem używa się jakiejś przybliżonej metody jego rozwiązania. Dla obliczeń numerycznych, w związku z błędami reprezentacji, zamiast tego układu, rozwiązujemy zadanie postaci:

$$\begin{cases} z' = f(x, z) + \delta f(x) & x \in [a, b] \\ z(a) = y_a + \delta y_a \end{cases}$$

$\delta f(x)$ i δy_a są małymi zaburzeniami f i y_a .

3.2. Przedstaw metodę Eulera i jej modyfikacje

Metoda Eulera:

Metoda Eulera jest metodą różnicową jednostronną.
Przyjmujemy podział odcinka $[a, b]$, w którym pomierzymy
rozmiar na N podprzedziałów:

$$x_i = a + ih, \text{ gdzie } i = 0, 1, \dots, N \text{ a } h = \frac{b-a}{N}$$

- Zagadnienie jest postaci:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \text{ dla } x \in [a, b]$$

- Pochodną $y'(x)$ bierzemy przybliżeni obrazem różnicowym pierwszego rzędu
opartym na wartościach x_i i x_{i+1} .

$$y'(x) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + \frac{h}{2} y''(\xi), \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}]$$

• Zskorzystaj dwie metody
modyfikacji met. Eulera:
lub w swojej formie:

- Otrzymujemy w ten sposób schemat:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + g_i$$

$$y(x_0 = a) = y_a$$

$$\text{gdzie } |g_i| \leq M_2 h^2, \text{ a } M_2 = \max_{x \in [a, b]} \frac{|y''(x)|}{2}$$

- Pomijając w powyższym schemacie składnik g_i dostajemy
schemat metody Eulera:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), & \text{dla } i = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

- Metoda Eulera jest nadto skłonna do rozbieżności na dużej odległości.
Błąd tej metody jest wprost proporcjonalny do kroku różnicowego.

1. Metoda Heuna (ulepiona met. Eulera):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)))$$

2. Modyfikacja metody Eulera:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(x_i, y_i))$$

ZADANIE:

Oblicz wykorzystując metodę Eulera, wartość funkcji $y(1)$ dla zagadnienia początkowego postaci $y' = 4x + 2y$, $y(0) = 2$ z krokiem $h = 0,25$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$x_1 = x_0 + h = 0,25$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot (4 \cdot x_0 + 2 \cdot y_0) = 2 + 0,25 \cdot (4 \cdot 0 + 2 \cdot 2) = 2 + 1 = 3$$

$$x_2 = x_1 + h = 0,50$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot (4 \cdot x_1 + 2 \cdot y_1) = 3 + 0,25 \cdot (4 \cdot 0,25 + 2 \cdot 3) = 3 + 1,75 = 4,75$$

$$x_3 = x_2 + h = 0,75$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot (4 \cdot x_2 + 2 \cdot y_2) = 4,75 + 0,25 \cdot (4 \cdot 0,5 + 2 \cdot 4,75) = 4,75 + 0,25 \cdot (2 + 9,5) = 4,75 + 2,625 = 7,375$$

$$x_4 = x_3 + h = 1$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot (4 \cdot x_3 + 2 \cdot y_3) = 7,375 + 0,25 \cdot (4 \cdot 0,75 + 2 \cdot 7,375) = 7,375 + 0,25 \cdot (3 + 14,75) = 7,375 + 4,6875 = 12,0625$$

$$= 7,375 + 0,25 \cdot (3 + 14,75) = 12,0625$$

- 3.3. Oblicz, wykorzystując metodę Eulera, wartość funkcji w $y(1)$ dla zagadnienia początkowego postaci $y' = 4x + 2y$, $y(0) = 2$ z krokiem $h = 0,25$

Zadanie rozwiązane na zdjęciu, nie wiem za bardzo o co chodzi z tym $y(1)$, czy chodzi o to że to $x_4 = 1$?

SPRAWDŹCIE <3

2015 T3

Zadanie 1. - Identyczne jak II termin grA, czyli

1. ZAD. 1 A

1.1. Podaj definicję ilorazów różnicowych funkcji f opartych na wielokrotnych węzłach dla różnych węzłów $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ o krotnościach odpowiednio i_{i+1}, \dots, i_{i+k} .

- dla różnych węzłów $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}$ o krotnościach odpowiednio $i_l, i_{l+1}, \dots, i_{l+k}$

$$f[x_l, i_l; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k}] = \frac{(f[x_l, i_l - 1; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k}] - f[x_l, i_l; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k} - 1])}{(x_{l+k} - x_l)}$$

Zakładamy, że istnieją pochodne $f^{(j)}(x_{i_{l+m}})$ dla $m = 0, 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, i_{l+m} - 1$.

W zadaniu krotność zaczyna się od $i(i+1)$ a w rozwiązaniu od $i(1)$. Szczerze nie wiem czy to się czymś różni... ale tak tylko mówię.

// Marcin - Definicja różni się wtedy tym, że iloraz różnicowy zapisujemy jako $f([x_l, i(l+1); x_{l+1}, i(l+k)])$.

Jeśli znajdę, że to jednak coś innego to zmienię.

W jakich miejscach doładnie zajdzie ta zamiana??

$$f[x_i, i_{i+1}; \dots; x_{i+k}, i_{i+k}] = \frac{(f[x_i, i_{i+1} - 1; \dots; x_{i+k}, i_{i+k}] - f[x_i, i_{i+1}; \dots; x_{i+k}, i_{i+k} - 1])}{x_{i+k} - x_i}$$

Chyba takie coś

1.2. Znajdź wielomian interpolacyjny Hermite'a w postaci Newtona, wiedząc o funkcji f , że:
 $f(1) = 4, f(2) = 2, f'(2) = 2, f''(2) = 2$.

Wielomian interpolacyjny Hermite w postaci Newtona

$$f(1) = 4 \quad f(2) = 2, \quad f'(2) = 2 \quad f''(2) = 2$$

w_i	(1)	(2)	w_i
$f(x_i)$	4	2	$1 + 3 = 4, \quad u_{i+1} = u_i + w_i$
$f'(x_i)$	-	2	$u_{i+1} = u_i + w_i$
$f''(x_i)$	-	2	$u_{i+1} = u_i + w_i$

$$s(0) = 0$$

$$s(1) = u_0 = 1$$

$$p_{(s)ij}(x) = (x-x_0)^{u_0} (x-x_1)^{u_1} \dots (x-x_{i-1})^{u_{i-1}} (x-x_{i+1})^{u_{i+1}} \dots (x-x_n)^{u_n}$$

~~$i=0 \rightarrow j=0 \rightarrow l=0$~~

~~$i=1 \rightarrow j=0 \rightarrow l=1$~~

~~$i=1 \rightarrow j=1 \rightarrow l=2$~~

$i=0 \rightarrow j=0 \rightarrow l=0$

$i=1 \rightarrow j=0 \rightarrow l=1$

$i=1 \rightarrow j=1 \rightarrow l=2$

$i=0, 1, 2$

~~$p_{s(0)}(x) = 1$~~

~~$p_{s(1)}(x) = (x-x_0)(x-x_1)^3$~~

~~$p_{s(0)}(x) = 1$~~

~~$p_{s(1)}(x) = (x-x_0)^{u_0} (x-x_1)^{u_1} = 1$~~

~~$p_{s(1)}(x) = (x-x_0)^{u_0} (x-x_1)^{u_1} = 1$~~

~~$(x-x_0)^{u_0} (x-x_1)^{u_1}$~~

$i=1 \quad j=1, 2$

~~$p_{s(0)}(x) = 1$~~

~~$p_{s(1)}(x) = (x-x_0)^{u_0} = x-4$~~

~~$p_{s(1)}(x) = p_{s(1)}(x) = p_{s(1)}(x) (x-x_1)^{u_1}$~~

$0 \leq l \leq 0, 1, 2, 3$
 $H_n(x) = b_0 p_0(x) + W_1(x)$

$$b_j = \frac{f^{(j)}(x_i) - W_1^{(j)}(x_i)}{p_{s(i)}(x_i) \cdot j!}$$

$l=0, c=0, j=0, s=0$
 $b_0 = \frac{f(x_0)}{p_{s(0)}(x_0) \cdot 0!} = 0$

$l=1, c=1, j=0, s(1)=1, W_1(x) = b_0 p_0(x) = 0$
 $b_1 = \frac{f(x_1) - W_1(x_1)}{p_{s(1)}(x_1) \cdot 1!} = \frac{2-0}{-2 \cdot 0!} = \frac{2-0}{-2} = -1$
 $p_{s(1)}(x_1) = x_1 - 4 = 1 - 4 = -2$

~~$l=2, c=2, j=1$~~
 $l=2, c=1, j=1, s(1)=2, W_1(x) = \cancel{b_0 p_0(x)} + b_1 p_1(x) = 0 + (-2x + 8)$
 $b_2 = \frac{f'(x_1) - W_1'(x_1)}{p_{s(1)}(x_1) \cdot 1!} = \frac{2-2}{-2} = 0$

~~$l=3, c=1, j=2, s(1)=3$~~
 $W_1(x) = -2x + 8 + 0$
 $H(x) = -2x + 8 + 0 + 0 = -2x + 8$

// jutro ładniejsze wrzuce

Zadanie 2. - Opisz metodę Newtona-Rabsona - Rozwiąż tą metodą jakieś równanie

//Na wykładach nie wrzucone jeszcze to, więc inne internety.

Metoda ta, zwana również metodą Newtona, Newtona-Raphsona lub **metodą stycznych**, pozwala obliczyć miejsca zerowe funkcji nieliniowych w przedziałach, musi ona jednak spełniać następujące warunki:

- funkcja f oraz jej pierwsza i druga pochodna są ciągłe w badanym przedziale $\langle a, b \rangle$,
- wewnątrz $\langle a, b \rangle$ znajduje się dokładnie jeden pierwiastek,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$,
- pierwsza i druga pochodna mają stały znak w badanym przedziale $\langle a, b \rangle$.

Metoda przebiega następująco: badamy znaki funkcji i drugiej pochodnej na krańcach badanego przedziału $\langle a, b \rangle$. Za punkt $x^{(0)}$ wybieramy ten koniec przedziału, w którym funkcja i jej druga pochodna mają równe znaki, a wzór na kolejne punkty wygląda następująco:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

* Po pewnej liczbie kroków albo otrzymujemy pierwiastek dokładny albo ciąg przedziałów zbieżny do pierwiastka. Maksymalny błąd i -tego przybliżenia to:

$$\frac{\max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|}{2 \cdot \min_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|} \cdot \left(\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right)^2$$

Przykład z neta:

Obliczymy z dokładnością do 0,01 za pomocą metody stycznych pierwiastek funkcji $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$, za punkt startowy przyjmujemy $x_A = 1$.

Krok 1. $x_A = 1$

Obliczamy wartość funkcji dla wybranego punktu oraz wartość funkcji pochodnej w tym punkcie.

$$f(x_A) = f(1) = 1, f'(x_A) = f'(1) = 3$$

Obliczamy punkt przecięcia się stycznej do wykresu w punkcie x_A z osią x :

$$x_0 = x_A - f(x_A) / f'(x_A) = 1 - 1 / 3 = 0,6666\dots$$

Obliczamy wartość funkcji dla wyliczonego punktu x_0

$$f(x_0) = f(0,6666\dots) = 0,185185185$$

Wartość ta nie wpada w założone otoczenie zera - 0,01, więc za x_A przyjmujemy obliczony punkt x_0 i obliczenia kontynuujemy w kolejnym kroku.

Krok 2 $x_A = 0,6666\dots$

$$f(x_A) = f(0,6666\dots) = 0,185185185$$

$$f'(x_A) = f'(0,6666\dots) = 2$$

Obliczamy punkt przecięcia się stycznej do wykresu w punkcie x_A z osią x :

$$x_0 = x_A - f(x_A) / f'(x_A) = 0,6666\dots - 0,185185185 / 2 = 0,574074074$$

Obliczamy wartość funkcji dla wyliczonego punktu x_0

$$f(x_0) = f(0,574074074) = 0,007779556$$

Wartość funkcji wpada w założone otoczenie zera, więc otrzymany punkt $x_0 = 0,574074074$ jest przybliżonym pierwiastkiem naszej funkcji.

Zadanie 3. - Całkowanie numeryczne . Zdefiniuj pojęcie kwadratury liniowej. - Co to kwadratury Newtona Cotesa ? Jak wygląda ta kwadratura dla $n=1$ dla funkcji f , gdzie n to liczba węzłów - Oblicz metoda z pkt2 całkę z $\cos(2x)$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$

a) **Całkowanie numeryczne** – metoda numeryczna polegająca na przybliżonym obliczaniu całek oznaczonych. Termin **kwadratura numeryczna**, często po prostu *kwadratura*, jest synonimem całkowania numerycznego, w szczególności w odniesieniu do całek jednowymiarowych. Dwu- i wyżej wymiarowe całkowania nazywane są czasami **kubaturami**, choć wyraz *kwadratura* również niesie to znaczenie dla całkowania w wyższych wymiarach. (wiki)

b) Kwadratura liniowa

- Zadanie przybliżonego obliczania całek to aproksymacja funkcjonału I innymi, prostszymi do obliczania funkcjonałami. W praktyce znamy funkcję podcałkową f i ewentualnie jej kolejne

pochoďne. Wobec tego całka $\int_a^b f(x) dx$ przybliżana jest funkcjonałami Q postaci:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n_0} A_{i,0} f(x_{i,0}) + \sum_{i=1}^{n_1} A_{i,1} f'(x_{i,1}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} A_{i,k} f^{(k)}(x_{i,k}) \quad (2)$$

Funkcjonał Q to kwadratura liniowa, współczynniki $A_{i,j}$ to współczynniki kwadratury, punkty $x_{i,j}$ to węzły kwadratury

$$I_p(f) := \int_a^b p(x) f(x) dx$$

- Bardziej ogólna postać dla Q :

gdzie p to funkcja wagowa, nieujemna na odcinku $[a, b]$, zerująca się w nim w skończonej liczbie

punktów i całkowna, tzn. $\int_a^b p(x) dx < \infty$

- Najczęściej stosowane kwadratury korzystają jedynie z wartości funkcji f i mają postać:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

:

Kwadratura Newtona-Cotesa

Kwadraturą Newtona-Cotesa przybliżającą $\int_a^b f(x)dx$ jest nazywana kwadratura postaci:

$$Q(f) = I(L_n)$$

gdzie L_n jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji f opartym na równoodległych węzłach $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = a + nh = b$

Dla węzłów równoodległych wielomian L_n jest postaci

$$L_n(x) = L_n(a + th) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-j}{i-j} \quad (14)$$

gdzie $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n, h := (b - a)/n$

$$Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

Całkując prawą stronę równ. (14) otrzymujemy kwadraturę

ze współczynnikami A_i określonymi jako:

. Można sprawdzić, że $A_i = A_{n-i}$.

c) Dla $n = 1$

Przykład 1. Wzór trapezów

Dla $n = 1$ węzłami kwadratury są krańce przedziału $x_0 = a, x_1 = b$

Obliczamy współczynniki

$$A_0 = (b - a) \int_0^1 \frac{t-1}{0-1} dt = \frac{b-a}{2}$$
$$A_1 = (b - a) \int_0^1 \frac{t-0}{1-0} dt = \frac{b-a}{2}$$

Kwadratura Newtona-Cotesa dla $n = 1$ jest równa

$$Q(f) = I(L_1) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Otrzymaliśmy tzw. wzór trapezów

Skoro metoda trapezów to tak samo jak Głowacz wyżej opisywał jedziemy iterując i zwiększając krok wzorem na trapezy:

Metoda trapezów:

$$H = \frac{b-a}{N}; S(f) = H \cdot \left(\frac{1}{2} f_0 + \sum_{j=0}^{N-1} f_j + \frac{1}{2} f_N \right)$$

T2 2015 B

Zad.1.1 Sformułuj zadanie interpolacji Hermite'a

Zadanie interpolacji Hermite'a polega na znalezieniu wielomianu H_n , którego wartości oraz odpowiednie wartości pochodnych są równe danym wartościom. Stopień wielomianu interpolacyjnego jest nie większy niż n , gdzie $\sum_{i=0}^k m_i = n + 1$. Czyli szukamy takiego wielomianu, dla którego:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \text{ dla } i=0, 1, \dots, k \text{ oraz } j=0, 1, \dots, m_i-1.$$

Zad.1.2 Znajdź wielomian interpolacyjny Hermite'a w postaci Newtona, wiedząc o funkcji f , że:

$$f(3) = 1, f'(3) = 3, f''(3) = 0, f(5) = 1, f'(5) = 3.$$

Zad.2.1 Przedstaw ogólny schemat budowy dowolnej metody iteracyjnej rozwiązywania układów równań liniowych.

Metoda Jacobiego jest metodą iteracyjną rozwiązywania układu równań liniowych. Metody te polegają na konstruowaniu ciągu przybliżeń wektora rozwiązań $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots$ określonego wzorem:

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + w, \quad i=0, 1, \dots \text{ gdzie } M \text{ jest pewną macierzą kwadratową, a } w \text{ jest wektorem.}$$

Zad.3.1 Zdefiniuj zagadnienie początkowe Cauchy'ego

Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu to równanie w postaci:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \text{ dla } a \leq x \leq b.$$

Rozwiązanie takiego równania nie jest jednoznaczne. W czasie całkowania pojawia się stała całkowania, która nie jest ściśle określona. Dlatego, aby rozwiązanie równania różniczkowego było jednoznaczne potrzebujemy warunku początkowego:

$$y(a) = y_a.$$

Zagadnienie w tej postaci nazywamy **zagadnieniem Cauchy'ego**.

Zad.3.1 Przedstaw metodę Eulera i jej modyfikacje.

Metoda Eulera jest metodą różnicową jednokrokową. Przyjmujemy podział odcinka $[a, b]$, w którym poszukujemy rozwiązania na N podprzedziałów:

$$x_i = a + ih, \text{ gdzie } i = 0, 1, \dots, N, \text{ a } h = \frac{b-a}{N}.$$

Zagadnienie jest postaci:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \text{ dla } a \leq x \leq b.$$

Otrzymujemy schemat:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + g_i,$$

$$y(x_0 = a) = y_a,$$

Metoda Eulera jest rzadko stosowana ze względu na wolną zbieżność. Istnieją dwie jej modyfikacje, które są szybciej zbieżne:

1. Metoda Heuna (ulepszona metoda Eulera):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))).$$

2. Zmodyfikowana metoda Eulera:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(x_i, y_i)).$$

Zad.3.3

Oblicz, wykorzystując metodą Eulera, wartość funkcji w $y(1)$ dla zagadnienia początkowego postaci $y' = 4x + 2y$, $y(0) = 2$ z krokiem $h = 0.25$.

Kiedy jutro masz egzamin ale
akurat nalał ci się kieliszek
przepysznej wódeczki:



fb.com/sredniowieczne.memy

ITERACYJNE METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH

1.1. METODA ITERACJI PROSTYCH

Ogólny schemat obliczeń iteracyjnych przedstawia metoda iteracji prostych. Za jej pomocą można rozwiązać układ równań liniowych (o n niewiadomych) (1.1.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Układ ten można zapisać w postaci

$$Ax = b$$

przyjmując, że

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

oraz

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Przy założeniu, że elementy główne macierzy A są różne od zera (czyli $a_{ii} \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$), należy przekształcić układ 1.1.1 w taki sposób, aby wyznaczyć z pierwszego równania x_1 , z drugiego równania x_2 , itd. aż do x_n .

Dostajemy

$$\begin{cases} x_1 = \frac{(b_1 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n))}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{(b_2 - (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n))}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{(b_n - (a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}))}{a_{nn}} \end{cases}$$

Otrzymany układ można zapisać równoważnie w postaci (1.1.2)

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n2}x_2 + \alpha_{n3}x_3 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{cases}$$

gdzie:

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad \text{dla } i \neq j$$

oraz

$$\alpha_{ii} = 0 \quad \text{dla } i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Przyjmując

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

układ 1.1.2 można zapisać w postaci macierzowej jako

$$x = \beta + \alpha \cdot x$$

Otrzymaną równość wykorzystuje się do uzyskania kolejnych przybliżeń rozwiązania układu. W tym celu, jako rozwiązanie początkowe, biera się dowolny wektor $x^{(0)}$ (np. wektor zerowy) i oblicza się kolejne iteracje

$$x^{(1)} = \beta + \alpha \cdot x^{(0)}$$

(przybliżenie pierwsze),

$$x^{(2)} = \beta + \alpha \cdot x^{(1)}$$

(przybliżenie drugie) itd. Stąd ogólny wzór iteracyjny (1.1.3)

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot x^{(k)}$$

Kolejne przybliżenia $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ utworzą ciąg wektorów. Jeżeli istnieje granica tego ciągu $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$, wtedy x jest rozwiązaniem układu równań liniowych. Aby powyższa granica istniała, to ciąg wektorów $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ musi być ciągiem zbieżnym. Zbieżność tego ciągu jest równoważna zbieżności metody iteracyjnej.

1.3. METODA JACOBIEGO

Jedną z metod iteracyjnych jest metoda Jacobiego [1, 4, 7, 8]. Jej macierz Q jest macierzą przekątniową o elementach a_{ii} takich, jak w A , czyli

$$Q = D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$$

Wtedy proces iteracyjny zapisuje się jako

$$x^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

Inaczej można go zapisać w postaci

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^k \right)$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz iteracji $k = 0, 1, \dots$.

Metoda ta będzie zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\|I - D^{-1}A\| < 1$. Biorąc normę $l_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

$$\|I - D^{-1}A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Jeżeli dla wszystkich i spełniona jest nierówność $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, to $\|I - D^{-1}A\|_\infty < 1$.

Zatem prawdziwe są twierdzenia:

Twierdzenie 3a (Mocne kryterium sumy wierszy)

Metoda Jacobiego jest zbieżna dla wszystkich macierzy A spełniających warunek (1.3.1):

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Twierdzenie 3b (Mocne kryterium sumy kolumn)

Metoda Jacobiego zbiega dla wszystkich macierzy A spełniających warunek (1.3.2):

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

dla $j = 1, 2, \dots, n$.

Macierz A spełniająca warunek 1.3.1 (1.3.2) nazywana jest macierzą ściśle diagonalnie dominującą według wierszy (według kolumn).

Równoważnie można powiedzieć, że jeśli macierz A jest dominująca przekątniowo, to dla dowolnego wektora początkowego metoda Jacobiego tworzy ciąg zbieżny do rozwiązania układu $Ax = b$.

1.4. METODA GAUSSA-SEIDLA

W metodzie tej macierz A przedstawia się w postaci $A = L + D + U$, gdzie D - macierz diagonalna, L - macierz trójkątna dolna, zaś U - macierz trójkątna górna [1, 7, 8]. Wtedy układ równań $Ax = b$ można przedstawić w postaci

$$(D + L)x = -Ux + b$$

Zatem dla wzoru 1.2.1 $Q = D + L$. Dlatego proces iteracyjny można zapisać w postaci

$$x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}b$$

Równoważna postać tego procesu to

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz iteracji $k = 0, 1, \dots$.

Zapis ten dobrze pokazuje różnicę pomiędzy tą metodą iteracyjną a metodą Jacobiego. Widać, że metoda Gaussa-Seidla, wyznaczając w jednym kroku iteracyjnym kolejne elementy wektora $x^{(k)}$, korzysta zarówno z wartości wektora $x^{(k-1)}$ jak i z wyznaczonych już elementów wektora $x^{(k)}$. W metodzie Jacobiego natomiast nowe przybliżenia składowych rozwiązania wykorzystywane są dopiero w kolejnej iteracji, dzięki czemu można je obliczać jednocześnie.

Kryterium zbieżności metody Gaussa-Seidla jest takie samo jak dla metody Jacobiego, co pokazuje poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 4

Jeśli macierz A jest dominująca przekątniowo, to metoda Gaussa-Seidla jest zbieżna dla dowolnego wektora początkowego.

Metody numeryczne

Interpolacja

IT/IO, WIMiP

Danuta Szeliga

AGH Kraków

Spis treści I

- 1 Wstęp
- 2 Interpolacja
- 3 Postacie wielomianu
 - Postać naturalna
 - Postać Newtona
 - Wielomiany Czebyszewa
- 4 Interpolacja Lagrange'a
 - Definicja wielomianu
 - Wyznaczanie wartości
 - Ilorazy różnicowe - węzły jednokrotne
 - Interpolacja Lagrange'a w przypadku węzłów równoodległych
- 5 Interpolacja Hermite'a
 - Sformułowanie zadania
 - Postać Newtona
 - Ilorazy różnicowe
 - Zbieżność procesu interpolacyjnego

Spis treści II

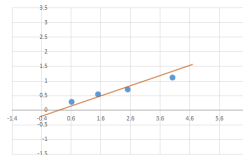
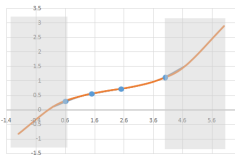
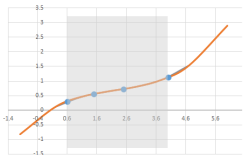
- 6 Interpolacja trygonometryczna
 - Sformułowanie zadania
 - Wyznaczanie współczynników
 - Szybkie transformacje Fouriera FFT

- 7 Interpolacja funkcjami sklejanymi

- 8 Przykłady
 - Interpolacja Lagrange'a
 - Reszta interpolacyjna
 - Interpolacja Hermite'a

Pojęcia podstawowe

- *Interpolacja*. Funkcja, np. wielomian stopnia n , przechodzi dokładnie przez zadane punkty. Poszukiwane są wartości pomiędzy zadanymi węzłami.
- *Ekstrapolacja*. Funkcja, np. wielomian stopnia n , przechodzi dokładnie przez zadane punkty. Poszukiwane są wartości poza zakresem węzłów.
- *Aproksymacja*. Funkcja, np. wielomian stopnia mniejszego niż n , dopasowany do n zadanych punktów wg przyjętego kryterium dopasowania.



Interpolacja, ekstrapolacja, aproksymacja

Interpolacja

- Modelowanie zjawisk, dla których nieznane są funkcje opisujące zależności pomiędzy obserwowanymi/mierzalnymi wielkościami

Interpolacja

- Modelowanie zjawisk, dla których nieznane są funkcje opisujące zależności pomiędzy obserwowanymi/mierzalnymi wielkościami
- Dostępne są informacje o wartościach lub pochodnych tych funkcji dla określonych argumentów (danych wejściowych) - dane dyskretne

Interpolacja

- Modelowanie zjawisk, dla których nieznane są funkcje opisujące zależności pomiędzy obserwowanymi/mierzalnymi wielkościami
- Dostępne są informacje o wartościach lub pochodnych tych funkcji dla określonych argumentów (danych wejściowych) - dane dyskretne
- Przypadek ogólny - funkcja dana poprzez wartości pewnych funkcyjałów \mathcal{F}_j na funkcji f , tj.

$$\mathfrak{R}(f) = \{\mathcal{F}_j(f) : j = 1, \dots, n\}$$

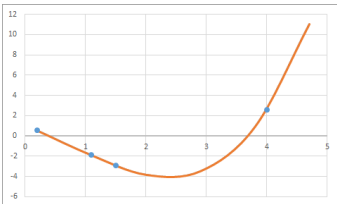
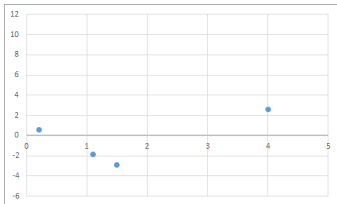
Interpolacja

Zadanie interpolacyjne polega na znalezieniu w ustalonej klasie funkcji "przybliżenia" g danej funkcji f , dla którego funkcjonały \mathfrak{R} przyjmują te same wartości

$$\mathcal{F}_j(f) = \mathcal{F}_j(g) \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, n \quad \text{tzn. } \mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}(g)$$

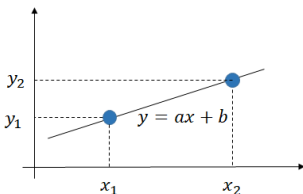
Przykład

Przypadek najprostszy - interpolacja wielomianowa, gdy dany jest dyskretny zbiór punktów



Najprostsze zadanie interpolacji I

Znajdź liniową zależność $y = ax + b$, a i b są nieznanne, pomiędzy dwoma punktami (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2)



Stosując zapis macierzowy

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: dowolna metoda rozwiązywania liniowych układów równań, np. metodą wyznaczników

$$a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \quad b = (x_2 y_1 - x_1 y_2)/(x_2 - x_1)$$

Najprostsze zadanie interpolacji II

Postać Newtona

$$y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

Postać Lagrange'a

$$y = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}y_2$$

Postacie wielomianu

Postacie wielomianu

Wielomian w postaci naturalnej (rozwiniecie potęgowe)

$$w(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Postacie wielomianu

Wielomian w postaci naturalnej (rozwiniecie potęgowe)

$$w(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Reprezentacja wymaga zapamiętania w pamięci $n + 1$ współczynników a_k

Postacie wielomianu

Wielomian w postaci naturalnej (rozwińnięcie potęgowe)

$$w(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Reprezentacja wymaga zapamiętania w pamięci $n + 1$ współczynników a_k

Postać naturalna jest rozwinięciem Maclaurina wielomianu w , gdzie

$$a_k = \frac{w^{(k)}(0)}{k!}$$

Informacja o wielomianie stopnia n składa się z jego znormalizowanych pochodnych w punkcie zero.

Obliczenie wartości wielomianu $w(x)$ w punkcie x , $x \neq 0$

Wielomian w postaci naturalnej można przedstawić w postaci:

$$w(x) = (\dots (a_n x + a_{n-1})x + \dots + a_1)x + a_0$$

i stąd wynika *schemat Hornera* obliczania wartości wielomianu $w(x)$:

$$w_n = a_n$$

$$w_i = w_{i+1} \cdot x + a_i \quad \text{dla } i = n-1, n-2, \dots, 0$$

Oczywiste jest, że $w(x) = w_0$

Można pokazać, że algorytm Hornera jest numerycznie poprawny (wskaźnik kumulacji co najwyżej $2n + 1$)

Postacie wielomianu

Wielomian w postaci Newtona

$$w(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$$

gdzie

$$p_0(x) \stackrel{df}{=} 1$$

$$p_k(x) \stackrel{df}{=} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n$$

a x_0, x_1, \dots, x_n są danymi liczbowymi.

Postacie wielomianu

Wielomian w postaci Newtona

$$w(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$$

gdzie

$$p_0(x) \stackrel{df}{=} 1$$

$$p_k(x) \stackrel{df}{=} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n$$

a x_0, x_1, \dots, x_n są danymi liczbowymi.

Wielomiany p_k ($k = 0, 1, \dots, n$) tworzą bazę przestrzeni W_n wielomianów stopnia nie wyższego niż n

Postacie wielomianu

Wielomian w postaci Newtona można zapisać jako:

$$w(x) = (\dots (b_n(x - x_{n-1}) + b_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + b_1)(x - x_0) + b_0$$

Postacie wielomianu

Wielomian w postaci Newtona można zapisać jako:

$$w(x) = (\dots (b_n(x - x_{n-1}) + b_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + b_1)(x - x_0) + b_0$$

Jeżeli zdefiniujemy rekurencyjnie wielomiany (*uogólniony schemat Hornera*):

$$w_n = b_n$$

$$w_i = w_{i+1} \cdot (x - x_i) + b_i \quad \text{dla } i = n - 1, n - 2, \dots, 0$$

to otrzymamy

$$w(x) = w_0(x)$$

Postacie wielomianu

Wyznaczenie współczynników postaci naturalnej dla wielomianu w postaci Newtona

Każdy z wielomianów pomocniczych zdefiniowanych w uogólnionym algorytmie Hornera zapisujemy w postaci naturalnej:

$$w_i(x) = \sum_{k=i}^n a_k^{(i)} x^{k-i} \quad i = n, n-1, \dots, 0$$

i z rekurencyjnej definicji otrzymujemy:

$$a_n^{(n)} = b_n$$

$$\begin{aligned} w_i(x) &= \sum_{k=i+1}^n a_k^{(i+1)} x^{k-i} - \sum_{k=i+1}^n a_k^{(i+1)} x^{k-(i+1)} x_i + b_i \\ &= a_n^{(i+1)} x^{n-i} + \sum_{k=i+1}^{n-1} \left(a_k^{(i+1)} - a_{k+1}^{(i+1)} x_i \right) x^{k-i} + \left(b_i - a_{i+1}^{(i+1)} x_i \right) \end{aligned}$$

Postacie wielomianu

Wyznaczenie współczynników postaci naturalnej dla wielomianu w postaci Newtona - cd

Stąd współczynniki wielomianu postaci naturalnej kolejnych wielomianów w_i ($i = n, n - 1, \dots, 0$) można wyznaczyć rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} a_n^{(i)} &= b_n \\ a_i^{(i)} &= b_i - a_{i+1}^{(i+1)} x_i \\ a_k^{(i)} &= a_k^{(i+1)} - a_{k+1}^{(i+1)} x_i \quad k = i + 1, i + 2, \dots, n - i \end{aligned}$$

A szukane współczynniki a_k są równe $a_k^{(0)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Koszt algorytmu to $\frac{n(n+1)}{2}$ mnożeń i odejmowań.

Postacie wielomianu

Wielomian w postaci kombinacji liniowych wielomianów ortogonalnych

Przykład - rozwinięcie względem wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju T_k , zdefiniowane rekurencyjnie:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots$$

Postacie wielomianu

Wielomian w postaci kombinacji liniowych wielomianów ortogonalnych

Przykład - rozwinięcie względem wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju T_k , zdefiniowane rekurencyjnie:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots$$

Wielomiany te tworzą bazę \rightarrow dowolny wielomian w można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$w(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x)$$

Postacie wielomianu

Algorytm obliczania wartości wielomianu $w(x)$ w punkcie x :

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \\
 &= c_n T_n(x) + c_{n-1} T_{n-1}(x) + c_{n-2} T_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-3} c_k T_k(x) \\
 &= (2x\tilde{c}_n + c_{n-1} - \tilde{c}_{n+1}) T_{n-1}(x) + (c_{n-2} - \tilde{c}_n) T_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-3} c_k T_k(x) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &= (2x\tilde{c}_2 + c_1 - \tilde{c}_3) T_1(x) + (c_0 - \tilde{c}_2) T_0(x)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{n+2} &= \tilde{c}_{n+1} = 0 \\
 \tilde{c}_k &= 2x\tilde{c}_{k+1} + c_k - \tilde{c}_{k+2} \quad \text{dla } k = n, n-1, \dots, 1
 \end{aligned}$$

Przejsie do postaci naturalnej.

Interpolacja Lagrange'a

Sformułowanie zadania

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż n , którego wartości w $n + 1$ punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji:

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n$$

gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Konstrukcja wielomianu

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma jednoznaczne rozwiązanie, które można przedstawić w postaci:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

gdzie

$$l_i(x) \stackrel{df}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Konstrukcja wielomianu

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma jednoznaczne rozwiązanie, które można przedstawić w postaci:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

gdzie

$$l_i(x) \stackrel{df}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

l_i to wielomiany stopnia n takie, że

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Przykład wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a

Wielomiany bazowe L_i , dla $i = 0 \dots 3$, dla węzłów $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$

$$L_4(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

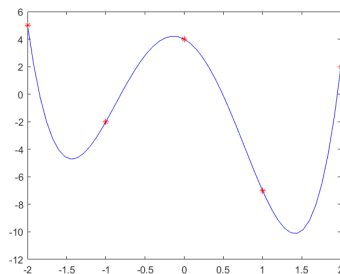
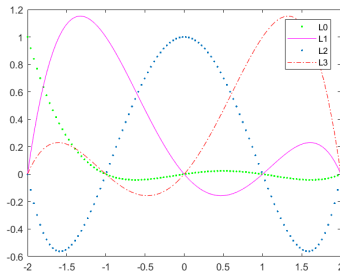
.....

I przykładowy wielomian L_4 dla $y_0 = 5$, $y_1 = -2$, $y_2 = 4$, $y_3 = -7$, $y_4 = 2$

Zauważmy, że dla dowolnego x zachodzi:

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$$

czyli w wielomianie interpolacyjnym każdy wielomian L_i ma udział wagowy równy y_i



Interpolacja Lagrange'a

Obliczanie wartości wielomianu $L_n(x)$ lub jego pochodnej w danym punkcie x na podstawie jego definicji nie jest wygodne.

Można zmniejszyć koszt obliczeniowy i pamięciowy jeśli przedstawimy wielomian $L_n(x)$ w postaci naturalnej ze współczynnikami a_k :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Jak wyznaczyć te współczynniki?

Interpolacja Lagrange'a

Obliczanie wartości wielomianu $L_n(x)$ lub jego pochodnej w danym punkcie x na podstawie jego definicji nie jest wygodne.

Można zmniejszyć koszt obliczeniowy i pamięciowy jeśli przedstawimy wielomian $L_n(x)$ w postaci naturalnej ze współczynnikami a_k :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Jak wyznaczyć te współczynniki?

Należy rozwiązać układ równań liniowych postaci:

$$a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Interpolacja Lagrange'a

Układ równań $\sum_{k=0}^n a_k x_i^k = f(x_i)$ w wielu przypadkach, np. dla węzłów równoodległych, jest b. źle uwarunkowany ze względu na macierz współczynników $X = (x_i^{j-1}) \rightarrow$ specjalne metody rozwiązywania układów tego typu albo ...

Interpolacja Lagrange'a

Układ równań $\sum_{k=0}^n a_k x_i^k = f(x_i)$ w wielu przypadkach, np. dla węzłów równoodległych, jest b. źle uwarunkowany ze względu na macierz współczynników $X = (x_i^{j-1}) \rightarrow$ specjalne metody rozwiązywania układów tego typu albo ...

wyznaczamy najpierw współczynniki b_k postaci Newtona wielomianu $L_n(x)$:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$$

a następnie przechodzimy do postaci naturalnej.

Koszt obliczeniowy tych operacji to n^2 działań arytmetycznych (koszt obliczeniowy rozwiązania liniowego układu równań standardową metodą to n^3 .)

Przykład

Interpolacja okręgu na podstawie zadanej liczby punktów
Okrąg opisany jest krzywą parametryczną
postaci:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t\pi/2) \\ y(t) = \sin(t\pi/2) \end{cases}$$

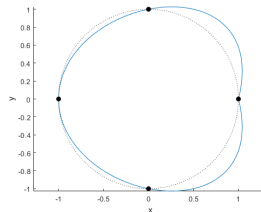
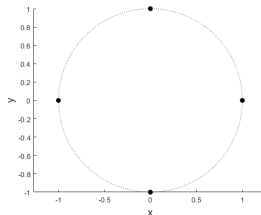
Okrąg będzie interpolowany dla następujących wartości:

t	0	1	2	3	4
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0

Tworzymy układy równań $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{x}$ (cosinus) i
 $\mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{y}$ (sinus), gdzie

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{bmatrix}$$

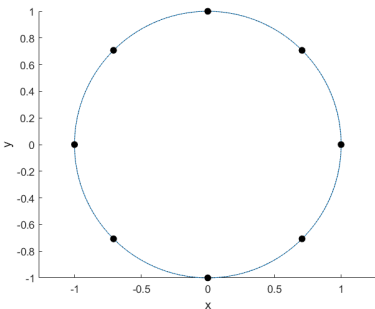
Rozwiązujemy: $\mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, $\mathbf{b} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}$



Przykład - cd.

Poprawa jakości rozwiązania → dołożenie dodatkowych punktów

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
x	1	0.7071	0	-0.7071	-1	-0.7071	0	0.7071	1
y	0	0.7071	1	0.7071	0	0.7071	-1	-0.7071	0



Postać Newtona wielomianu Lagrange'a

Dla wyznaczenia współczynników b_k zauważmy, że jeżeli L_{k-1} i L_k są wielomianami interpolacyjnymi funkcji f opartymi na węzłach x_0, x_1, \dots, x_{k-1} i x_0, x_1, \dots, x_k , to spełniają zależność rekurencyjną:

$$L_k(x) = L_{k-1}(x) + b_k p_k(x)$$

Każdy z wielomianów p_k ma współczynnik 1 przy x^k (z definicji tych wielomianów), a stąd wynika, że współczynnik b_k jest równy współczynnikowi przy x^k w wielomianie L_k .

Postać Newtona wielomianu Lagrange'a

Pamiętając, że wielomian L_k jest postaci (z definicji):

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^k f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

możemy obliczyć współczynniki b_k :

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)}$$

Postać Newtona wielomianu Lagrange'a

Pamiętając, że wielomian L_k jest postaci (z definicji):

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^k f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

możemy obliczyć współczynniki b_k :

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)}$$

Współczynniki b_k to **ilorazy różnicowe** funkcji f oparte na węzłach x_0, x_1, \dots, x_k .

Ilorazy różnicowe dla węzłów jednokrotnych

Węzły jednokrotne to węzły spełniające warunek $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Ilorazy różnicowe dla węzłów jednokrotnych

Węzły jednokrotne to węzły spełniające warunek $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Definicja. Ilorazem różnicowym rzędu k funkcji f opartym na parami różnych węzłach $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}$, w których określona jest funkcja f , nazywamy wyrażenie $f[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}]$ postaci:

$$f[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}] = \sum_{i=l}^{l+k} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=l \\ j \neq i}}^{l+k} (x_i - x_j)}$$

Ilorazy różnicowe dla węzłów jednokrotnych

Węzły jednokrotne to węzły spełniające warunek $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Definicja. Ilorazem różnicowym rzędu k funkcji f opartym na parami różnych węzłach $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}$, w których określona jest funkcja f , nazywamy wyrażenie $f[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}]$ postaci:

$$f[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}] = \sum_{i=l}^{l+k} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=l \\ j \neq i}}^{l+k} (x_i - x_j)}$$

Przez iloraz różnicowy rzędu zerowego oparty na węźle x_l rozumiana jest wartość funkcji w tym punkcie, tzn. $f[x_l] = f(x_l)$.

Wzory różnicowe dla węzłów jednokrotnych

Można pokazać, że dla dowolnego układu parami różnych punktów $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}$ należących do dziedziny funkcji f , zachodzi zależność rekurencyjna:

$$f[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}] = \frac{f[x_{l+1}, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}] - f[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k-1}]}{x_{l+k} - x_l}$$

Ilorazy różnicowe dla węzłów jednokrotnych

Można pokazać, że dla dowolnego układu parami różnych punktów $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}$ należących do dziedziny funkcji f , zachodzi zależność rekurencyjna:

$$f[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}] = \frac{f[x_{l+1}, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}] - f[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k-1}]}{x_{l+k} - x_l}$$

Zauważmy, że współczynniki postaci Newtona są równe $b_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$.

Ilorazy różnicowe dla węzłów jednokrotnych

Współczynniki postaci Newtona b_k można wyznaczyć obliczając rekurencyjnie odpowiednie ilorazy różnicowe.

Dla węzłów x_i i wartości $f(x_i)$ tworzymy trójkątną tablicę:

$$\begin{array}{rcl}
 x_0 & f(x_0) & \\
 x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
 x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}
 \end{array}$$

Ilorazy różnicowe dla węzłów jednokrotnych

Współczynniki postaci Newtona b_k można wyznaczyć obliczając rekurencyjnie odpowiednie ilorazy różnicowe.

Dla węzłów x_i i wartości $f(x_i)$ tworzymy trójkątną tablicę:

$$\begin{array}{rcl}
 x_0 & f(x_0) & \\
 x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
 x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}
 \end{array}$$

Współczynniki b_k są równe elementom przekątniowym tablicy, tzn.

$$b_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k].$$

Algorytm ilorazów różnicowych wymaga $n(n-1)/2$ dzieleni i dwa razy więcej odejmowań.

Interpolacja Lagrange'a w przypadku węzłów równoodległych

Często węzły interpolacyjne są równoodległe (i rzeczywiste):

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n$$

gdzie h to stała długość kroku. Wielomian Lagrange'a ma teraz postać:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-j}{i-j}$$

Interpolacja Lagrange'a w przypadku węzłów równoodległych

Przy węzłach równoodległych wygodna jest postać Newtona wielomianu interpolacyjnego, której współczynniki wyznaczone są za pomocą **różnic skończonych** funkcji f :

Różnica progresywna rzędu k funkcji f to

$$\begin{aligned}\Delta^0 f(x) &= f(x) \\ \Delta^k f(x) &= \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x) \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Różnica wsteczna rzędu k to

$$\begin{aligned}\nabla^0 f(x) &= f(x) \\ \nabla^k f(x) &= \nabla^{k-1} f(x) - \nabla^{k-1} f(x-h) \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Interpolacja Lagrange'a w przypadku węzłów równoodległych

Można pokazać, że jeżeli $x_i = x_0 + ih$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ to

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}$$

Interpolacja Lagrange'a w przypadku węzłów równoodległych

Można pokazać, że jeżeli $x_i = x_0 + ih$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ to

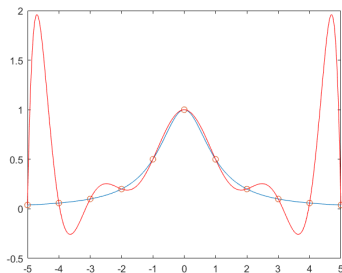
$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}$$

Dla $x = x_0 + th$ postać wielomianów p_k jest następująca:

$$p_k(x) = p_k(x_0 + th) = h^k \prod_{i=0}^{k-1} (t - i)$$

Uwagi do interpolacji Lagrange'a

- Interpolacja dla dużej liczby węzłów: otrzymujemy wielomiany wysokiego stopnia
- Szczególnie dla węzłów równoodległych prowadzi do oscylacji na końcach przedziału
- Zadanie interpolacji wielomianem wysokiego stopnia jest też wrażliwe na zaburzenie danych, jest źle uwarunkowane numerycznie
- Stosowana jest albo interpolacja lokalna niższego stopnia, czyli funkcje sklejane, albo interpolacja z narzuconymi węzłami Czebyszewa



Efekt Rungego dla funkcji $y = 1/(1+x^2)$

Interpolacja Hermite'a

Interpolacja Hermite'a

Danych jest $k + 1$ różnych węzłów x_0, x_1, \dots, x_k oraz liczby naturalne m_0, m_1, \dots, m_k takie, że $\sum_{i=0}^k m_i = n + 1$. Zadanie interpolacyjne Hermite'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu H_n stopnia nie wyższego niż n , spełniającego warunki:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

Interpolacja Hermite'a

Danych jest $k + 1$ różnych węzłów x_0, x_1, \dots, x_k oraz liczby naturalne m_0, m_1, \dots, m_k takie, że $\sum_{i=0}^k m_i = n + 1$. Zadanie interpolacyjne Hermite'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f^* wielomianu H_n stopnia nie wyższego niż n , spełniającego warunki:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

W szczególnym przypadku, gdy $m_i = 1$ interpolacja Hermite'a jest równoważna zadaniu interpolacji Lagrange'a.

Interpolacja Hermite'a - postać Newtona wielomianu

Wprowadźmy oznaczenie:

$$s(i) := \begin{cases} 0 & i = 0 \\ m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1} & i > 0 \end{cases}$$

gdzie $s(i)$ oznacza sumę krotności i początkowych węzłów interpolacyjnych.

Każda liczba l , $0 \leq l \leq n$, daje się jednoznacznie przedstawić w postaci $l = s(i) + j$, gdzie $0 \leq i \leq k$ i $0 \leq j \leq m_i - 1$.

Interpolacja Hermite'a - postać Newtona wielomianu

Wprowadźmy oznaczenie:

$$s(i) := \begin{cases} 0 & i = 0 \\ m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1} & i > 0 \end{cases}$$

gdzie $s(i)$ oznacza sumę krotności i początkowych węzłów interpolacyjnych.

Każda liczba l , $0 \leq l \leq n$, daje się jednoznacznie przedstawić w postaci $l = s(i) + j$, gdzie $0 \leq i \leq k$ i $0 \leq j \leq m_i - 1$.

Definiujemy wielomiany $p_{s(i)+j}$:

$$p_{s(0)}(x) := 1$$

$$p_{s(i)+j}(x) := (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_{i-1})^{m_{i-1}} (x - x_i)^j \\ i = 0, 1, \dots, k \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

Postać Newtona wielomianu - cd

Szukany wielomian interpolacyjny H_n zapisujemy w postaci Newtona jako:

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^n b_l p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{s(i)+j} p_{s(i)+j}(x)$$

Współczynniki b_l będą wyznaczone kolejno dla $l = 0, 1, \dots, n$.

Ilorazy różnicowe

Podobnie jak dla interpolacji Lagrange'a, współczynniki b_l postaci Newtona są równe odpowiednim ilorazom różnicowym.

Najprostszy przypadek - iloraz różnicowy funkcji f oparty na dwukrotnym węźle x_j .

Zakładamy, że f jest dwukrotnie różniczkowalna w x_i i otrzymujemy:

$$f[x_i, x_i] := \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(x_i)$$

Ilorazy różnicowe

Podobnie jak dla interpolacji Lagrange'a, współczynniki b_l postaci Newtona są równe odpowiednim ilorazom różnicowym.

Najprostszy przypadek - iloraz różnicowy funkcji f oparty na dwukrotnym węźle x_j .

Zakładamy, że f jest dwukrotnie różniczkowalna w x_j i otrzymujemy:

$$f[x_i, x_j] := \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_j} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(x_j)$$

Dla zapisu ilorazów różnicowych opartych na węzłach wielokrotnych stosujemy oznaczenia:

$$f[x_l, i_l; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k}] = \\ = f[\underbrace{x_l, \dots, x_l}_{i_l \text{ razy}}, \underbrace{x_{l+1}, \dots, x_{l+1}}_{i_{l+1} \text{ razy}}, \dots, \underbrace{x_{l+k}, \dots, x_{l+k}}_{i_{l+k} \text{ razy}}]$$

Ilorazy różnicowe - cd

Definicja. Ilorazy różnicowe funkcji f oparte na wielokrotnych węzłach definiujemy jako zależności

- dla i -krotnego węzła x_l

$$f[x_l, i] = \frac{f^{(i-1)}(x_l)}{(i-1)!}$$

- dla różnych węzłów $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}$ o krotnościach odpowiednio $i_l, i_{l+1}, \dots, i_{l+k}$

$$f[x_l, i_l; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k}] = \frac{f[x_l, i_l - 1; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k}] - f[x_l, i_l; x_{l+1}, i_{l+1}; \dots; x_{l+k}, i_{l+k} - 1]}{x_{l+k} - x_l}$$

Zakładamy, że istnieją pochodne $f^{(j)}(x_{i_{l+m}})$ dla $m = 0, 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, i_{l+m} - 1$.

Ilorazy różnicowe - cd

Współczynniki b_l , ($l = s(i) + j$, $i = 0, 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$) postaci Newtona dla wielomianu Hermite'a są równe ilorazom różnicowym interpolowanej funkcji opartym na początkowych węzłach z uwzględnieniem ich krotności:

$$b_l = f[x_0, m_0; x_1, m_1; \dots; x_{i-1}, m_{i-1}; x_i, j + 1]$$

Ilorazy różnicowe - cd

Współczynniki b_l , ($l = s(i) + j$, $i = 0, 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$) postaci Newtona dla wielomianu Hermite'a są równe ilorazom różnicowym interpolowanej funkcji opartym na początkowych węzłach z uwzględnieniem ich krotności:

$$b_l = f[x_0, m_0; x_1, m_1; \dots; x_{i-1}, m_{i-1}; x_i, j + 1]$$

Można pokazać, że jeżeli rzeczywista funkcja f ma ciągłą $(n + 1)$ -szą pochodną na odcinku $[a, b]$ zawierającym węzły rzeczywiste x_0, x_1, \dots, x_k, x , to istnieje punkt ξ , $\xi \in [a, b]$, dla którego

$$f[x_0, m_0; x_1, m_1; \dots; x_k, m_k; x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Ilorazy różnicowe - cd

Co więcej z zależności:

$$f[x_0, m_0; x_1, m_1; \dots; x_k, m_k; x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

oraz różnicy progrestywnej dla węzłów równoodległych:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k}$$

wynika, że jeżeli f jest wielomianem stopnia nie większego niż n , to ilorazy różnicowe i różnice skończone f rzędu wyższego od n są równe zeru.

Ilorazy różnicowe - cd

Co więcej z zależności:

$$f[x_0, m_0; x_1, m_1; \dots; x_k, m_k; x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

oraz różnicy progrestywnej dla węzłów równoodległych:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k}$$

wynika, że jeżeli f jest wielomianem stopnia nie większego niż n , to ilorazy różnicowe i różnice skończone f rzędu wyższego od n są równe zeru.

Ilorazy różnicowe - przykład

Przykład. Dane są węzły x_0 i x_1 o krotnościach odpowiednio $m_0 = 3$, $m_1 = 2$.

Dla danej funkcji f szukamy wielomianu interpolacyjnego Hermite'a H_4 takiego, że:

$$\begin{aligned} H_4(x_0) &= f(x_0) & H_4'(x_0) &= f'(x_0) & H_4''(x_0) &= f''(x_0) \\ H_4(x_1) &= f(x_1) & H_4'(x_1) &= f'(x_1) & & \end{aligned}$$

Wielomian H_4 można zapisać w postaci Newtona:

$$H_4(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + b_3(x-x_0)^3 + b_4(x-x_0)^3(x-x_1)$$

Współczynniki b_i są odpowiednimi ilorazami różnicowymi leżącymi na przekątnej, np. $b_0 = f[x_0] = f(x_0)$, $b_3 = f[x_0, 3; x_1]$

Ilorazy różnicowe - przykład, cd.

Tablica ilorazów różnicowych dla omawianego przykładu jest postaci

$$\begin{array}{l}
 x_0 \quad f(x_0) \\
 x_0 \quad f(x_0) \quad f[x_0, 2] = f'(x_0) \\
 x_0 \quad f(x_0) \quad f[x_0, 2] = f'(x_0) \quad f[x_0, 3] = \frac{f''(x_0)}{2!} \\
 x_1 \quad f(x_1) \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad f[x_0, 2; x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, 2]}{x_1 - x_0} \quad f[x_0, 3; x_1] \\
 x_1 \quad f(x_1) \quad f[x_1, 2] = f'(x_1) \quad f[x_0; x_1, 2] = \frac{f[x_1, 2] - f[x_0, x_1]}{x_1 - x_0} \quad f[x_0, 2; x_1, 2] = \frac{f[x_0; x_1, 2] - f[x_0, 2; x_1]}{x_1 - x_0} \quad f[x_0, 3; x_1, 2] = \frac{f[x_0, 2; x_1, 2] - f[x_0, 3; x_1]}{x_1 - x_0}
 \end{array}$$

Reszta wzoru interpolacyjnego

Jeżeli funkcja f jest $(m_i - 1)$ -krotnie różniczkowalna w punktach x_i , $i = 0, 1, \dots, k$, to dla $x \neq x_i$ zachodzi

$$r(x) = p_{n+1}(x)f[x_0, m_0; x_1, m_1; \dots; x_k, m_k; x]$$

Reszta wzoru interpolacyjnego

Jeżeli funkcja f jest $(m_i - 1)$ -krotnie różniczkowalna w punktach x_i , $i = 0, 1, \dots, k$, to dla $x \neq x_i$ zachodzi

$$r(x) = p_{n+1}(x)f[x_0, m_0; x_1, m_1; \dots; x_k, m_k; x]$$

Co więcej, można pokazać, że jeżeli funkcja f ma ciągłą $(n + 1)$ -szą pochodną na odcinku $[a, b]$ zawierającym węzły rzeczywiste x_i , $i = 0, \dots, k$ i punkt x , to istnieje $\xi = \xi(x)$, $\xi \in [a, b]$, dla którego

$$r(x) = p_{n+1}(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Wzór interpolacyjny Newtona

Z definicji wielomianów Hermite'a, współczynników b_j wielomianu Hermite'a w postaci Newtona oraz postaci reszty interpolacyjnej wynika zależność zwana *wzorem interpolacyjnym Newtona*:

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} f[x_0, m_0; x_1, m_1; \dots; x_{i-1}, m_{i-1}; x_i, j+1] \\ \times (x-x_0)^{m_0} (x-x_1)^{m_1} \dots (x-x_{i-1})^{m_{i-1}} (x-x_i)^j \\ + \underbrace{f[x_0, m_0; x_1, m_1; \dots; x_k, m_k; x]}_{r(x)} (x-x_0)^{m_0} (x-x_1)^{m_1} \dots (x-x_k)^{m_k}$$

Wzór interpolacyjny Newtona - cd

Dla interpolacji Lagrange'a wzór interpolacyjny Newtona upraszcza się do postaci:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}) \\ + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

Zbieżność ciągów wielomianów przy $n \rightarrow \infty$

Przykład 1. Można pokazać, że ciąg $\{L_n\}$ wielomianów interpolacyjnych funkcji f opartych na węzłach równooległych z przedziału $[a, b]$ jest jednostajnie zbieżny do f na tym przedziale.

Zbieżność ciągów wielomianów przy $n \rightarrow \infty$

Przykład 1. Można pokazać, że ciąg $\{L_n\}$ wielomianów interpolacyjnych funkcji f opartych na węzłach równooległych z przedziału $[a, b]$ jest jednostajnie zbieżny do f na tym przedziale.

Przykład 2 (Rungego). Niech L_n będzie wielomianem interpolacyjnym funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, opartym na równoodległych węzłach z przedziału $[-5, 4]$, $x_i = -5 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, $h = \frac{10}{n}$. Funkcja f jest klasy $C_{[-5,5]}^\infty$, a ciąg $\{L_n\}$ jest zbieżny do $f(x)$ tylko dla $|x| < 3.63$ i rozbieżny dla pozostałych wartości x .

Zbieżność - cd

Prawdziwe są następujące twierdzenia

Faber

Dla dowolnego układu węzłów interpolacyjnych istnieje funkcja ciągła, do której ciąg wielomianów interpolacyjnych nie jest jednostajnie zbieżny.

Z drugiej strony....

Dla dowolnej funkcji f ciągłej na odcinku $[a, b]$ istnieje ciąg wielomianów interpolacyjnych zbieżnych do f jednostajnie na $[a, b]$.

Nie jest to twierdzenie konstruktywne

Interpolacja trygonometryczna

Interpolacja trygonometryczna. Sformułowanie zadania

Interpolacja funkcji okresowych, czyli takich, że:

$$g(y + t) = g(y)$$

dla wszystkich y .

Zmieniając zmienną $x = \frac{2\pi}{t}y$ otrzymujemy funkcję okresową o okresie 2π :

$$f(x) = g\left(\frac{yt}{2\pi}\right)$$

Będziemy rozważać, bez straty ogólności, tylko funkcje o okresie 2π .

Sformułowanie zadania - cd

Zakładamy, że f jest funkcją zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych. W takim przypadku wygodnie jest rozważać wielomian, który jest kombinacją liniową zespolonych funkcji wykładniczych postaci:

$$e^{i jx} = \cos jx + i \sin jx \quad i = \sqrt{-1}$$

Sformułowanie zadania - cd

Zakładamy, że f jest funkcją zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych. W takim przypadku wygodnie jest rozważać wielomian, który jest kombinacją liniową zespolonych funkcji wykładniczych postaci:

$$e^{i jx} = \cos jx + i \sin jx \quad i = \sqrt{-1}$$

Zadanie interpolacji trygonometrycznej jest równoznaczne ze znalezieniem dla danej funkcji f wielomianu trygonometrycznego:

$$t_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j e^{i jx}$$

który w $n + 1$ różnych punktach x_k z przedziału $[0, 2\pi]$ przyjmuje te same wartości co interpolowana funkcja:

$$t_n(x_k) = f(x_k) \quad k = 0, 1, \dots, n \quad x_k \neq x_l \text{ dla } k \neq l$$

Wyznaczanie współczynników wielomianu trygonometrycznego

Będziemy rozważać wyznaczanie współczynników wielomianu trygonometrycznego dla węzłów równoodległych:

$$x_k = \frac{2k\pi}{n+1} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Przy tym założeniu rozwiązanie zadania interpolacyjnego istotnie się upraszcza.

Wyznaczanie współczynników - cd

Funkcje e^{ijx} , $j = 0, 1, \dots, n$, tworzą układ ortogonalny w sensie iloczynu skalarnego:

$$(f, g) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \bar{g}(x_k)$$

Można sprawdzić, że:

$$\begin{aligned} (e^{ilx}, e^{ijx}) &= \sum_{k=0}^n e^{ilx} e^{-ijx} = \sum_{k=0}^n e^{i(l-j)\frac{2k\pi}{n+1}x} = \\ &= \begin{cases} \frac{e^{i(l-j)\frac{2\pi}{n+1}} - 1}{e^{i(l-j)\frac{2\pi}{n+1}} - 1} = 0 & \text{dla } l \neq j \\ n + 1 & \text{dla } l = j \end{cases} \end{aligned}$$

Wyznaczanie współczynników - cd

Korzystając z informacji o iloczynie skalarnym, wyznaczamy współczynniki wielomianu trygonometrycznego $t_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j e^{i j x}$ interpolującego funkcję f , opartego na węzłach $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$, $k = 0, 1, \dots, n$, które są postaci:

$$c_j = \frac{(f, e^{i j x})}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) e^{-i j x_k}$$

Wyznaczanie współczynników - cd

Korzystając z informacji o iloczynie skalarnym, wyznaczamy

współczynniki wielomianu trygonometrycznego $t_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j e^{i j x}$

interpolującego funkcję f , opartego na węzłach $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$,

$k = 0, 1, \dots, n$, które są postaci:

$$c_j = \frac{(f, e^{i j x})}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) e^{-i j x_k}$$

Współczynniki c_j są równe współczynnikom *rozwinienia Fouriera* funkcji f względem iloczynu skalarnego, a zadanie wyznaczania tych współczynników - *dyskretną analizą Fouriera*.

Wyznaczanie współczynników dla funkcji o wartościach rzeczywistych

Trygonometryczny wielomian interpolacyjny funkcji f , oparty na węzłach $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$, $k = 0, 1, \dots, n$, można przedstawić w sposób równoważny do definicji

$t_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j e^{ijx}$ w postaci:

$$t_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx) + \delta \frac{1}{2}a_{m+1} \cos(m+1)x \quad (1)$$

gdzie $\delta = 0$, $m = \frac{1}{2}n$ *gdy n parzyste*
 $\delta = 1$, $m = \frac{1}{2}(n-1)$ *gdy n nieparzyste*
 współczynniki a_j, b_j są równe

$$a_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) \cos jx_k \quad (2)$$

$$b_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) \sin jx_k$$

Powyższe współ. dla funkcji f o wart.rzeczywistych są też rzeczywiste.

Szybkie transformacje Fouriera FFT

Algorytm wyznaczania współczynników c_j

lub

Rozwiązywanie zadania odwrotnego - obliczania wartości wielomianu trygonometrycznego w punktach $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Przyjmujemy oznaczenie $f(k) := f(x_k)$

- ZA - analiza Fouriera: dla danych liczb zespolonych $f(0), f(1), \dots, f(k)$ szukamy wielkości

$$c(j) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(k) e^{-ij \frac{2\pi k}{n+1}} \quad j = 0, 1, \dots, n$$

- ZS - synteza Fouriera (zadanie odwrotne do ZA): mając dane liczby zespolone $c(0), c(1), \dots, c(n)$ szukamy

$$f(k) = \sum_{j=0}^n c(j) e^{ij \frac{2\pi k}{n+1}} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

FFT. Algorytm

- Klasyczny algorytm rozwiązania ZA i ZS wymaga ok. $(n+1)^2$ zespolonych mnożeń i dodawań oraz obliczania $e^{-ij\frac{2\pi k}{n+1}}$
- Algorytm Cooleya i Tukeya szybkich transformacji Fouriera (FFT) jest obliczeniowo tańszy.
Jeżeli założymy, że $n+1 = r_1 r_2 \dots r_p$, to liczba zespolonych mnożeń i dodawań w alg. FFT jest rzędu $(n+1)(r_1 + r_2 + \dots + r_p)$.
Najczęściej FFT stosuje się dla $n+1 = 2^k$ (czyli wszystkich $r_j = 2$) i wtedy alg. wymaga $n \log_2 n$ rzędu działań.

FFT. Algorytm wg Reinscha

Wprowadzamy wielkości pomocnicze:

$$P_0 := 1, \quad P_j := \prod_{k=1}^j r_k \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, p$$

$$Q_j := \prod_{k=j+1}^p r_k \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, p-1, \quad Q_p := 1$$

Zauważmy, że dowolną liczbę całkowitą z przedziału $[0, n]$ można jednoznacznie przedstawić w postaci:

$$j = j_p P_{p-1} + \dots + j_1 P_0 \quad \text{gdzie } 0 \leq j_i \leq r_i - 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, p$$

lub

$$k = k_1 Q_1 + \dots + k_p Q_p \quad \text{gdzie } 0 \leq k_i \leq r_i - 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, p$$

FFT. Algorytm wg Reinscha - cd

Wzór na współczynniki $c(j)$ dla węzłów równoodległych można więc zapisać jako:

$$c(j) = \frac{1}{n+1} \sum_{k_p=0}^{r_p-1} \dots \sum_{k_1=0}^{r_1-1} e^{-2\pi i j (k_1 Q_1 + \dots + k_p Q_p) / (n+1)} f(k_1 Q_1 + \dots + k_p Q_p) \quad (3)$$

Wiemy, że $Q_i P_i = n+1$, $i = 0, 1, \dots, p$, wobec tego:

$$(k_1 Q_1 + \dots + k_p Q_p) / (n+1) = \frac{k_1}{P_1} + \dots + \frac{k_p}{P_p} \quad (4)$$

FFT. Algorytm wg Reinscha - cd

Z równań (3) i (4) wynika zależność:

$$\begin{aligned}
 (n+1)c(j) = & \sum_{k_p=0}^{r_p-1} e^{-2\pi i j \frac{k_p}{P_p}} \\
 & \sum_{k_{p-1}=0}^{r_{p-1}-1} e^{-2\pi i j \frac{k_{p-1}}{P_{p-1}}} \\
 & \dots \\
 & \sum_{k_1=0}^{r_1-1} e^{-2\pi i j \frac{k_1}{P_1}} f(k_1 Q_1 + \dots + k_p Q_p)
 \end{aligned}$$

Ponadto dla $m = 1, 2, \dots, p$ mamy:

$$e^{-2\pi i j \frac{k_m}{P_m}} = e^{-2\pi i (j_p P_{p-1} + \dots + j_1 P_0) \frac{k_m}{P_m}} = e^{-2\pi i (j_m P_{m-1} + \dots + j_1 P_0) \frac{k_m}{P_m}}$$

FFT. Algorytm wg Reinscha - cd

Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 (n+1)c(j) &= (n+1)c(j_p P_{p-1} + \dots + j_1 P_0) = \\
 &\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{k_p=0}^{r_p-1} e^{-2\pi i (j_p P_{p-1} + \dots + j_1 P_0) \frac{k_p}{P_p}} \\
 \sum_{k_{p-1}=0}^{r_{p-1}-1} e^{-2\pi i (j_{p-1} P_{p-2} + \dots + j_1 P_0) \frac{k_{p-1}}{P_{p-1}}} \\
 \dots \\
 \sum_{k_1=0}^{r_1-1} e^{-2\pi i j_1 P_0 \frac{k_1}{P_1}} \\
 0 \{ f(k_1 Q_1 + \dots + k_p Q_p) \}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Wyrażenie zakreślone klamrą $0 \{ \dots \}$ oznaczamy symbolem $S_0(k_1 Q_1 + \dots + k_p Q_p)$, klamrą $1 \{ \dots \}$ symbolem $S_1(j_1 Q_1 + k_2 Q_2 + \dots + k_p Q_p)$, ..., klamrą $p \{ \dots \}$ symbolem $S_p(j_1 Q_1 + \dots + j_p Q_p)$.

FFT. Algorytm Cooleya i Tukeya

Przy oznaczeniach jak na poprzednim slajdzie, algorytm Cooleya i Tukeya jest postaci:

- dla $k_i = 0, 1, \dots, r_i - 1, i = 1, 2, \dots, p$

$$S_0(k_1 Q_1 + \dots + k_p Q_p) := f(k_1 Q_1 + \dots + k_p Q_p)$$

- dla $m = 1, 2, \dots, p$

$$\begin{aligned} & S_m(j_1 Q_1 + \dots + j_m Q_m + k_{m+1} Q_{m+1} + \dots + k_p Q_p) \\ & := \sum_{k_m=0}^{r_m-1} e^{-2\pi i(j_m P_{m-1} + \dots + j_1 P_0) \frac{k_m}{P_m}} \\ & \cdot S_{m-1}(j_1 Q_1 + \dots + j_{m-1} Q_{m-1} + k_m Q_m + \dots + k_p Q_p) \end{aligned}$$

gdzie $j_i = 0, 1, \dots, r_i - 1$ dla $i = 1, 2, \dots, m$,

$k_j = 0, 1, \dots, r_j - 1$ dla $j = m + 1, m + 2, \dots, p$.

FFT. Algorytm Cooleya i Tukeya - cd

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia:

$$a := k_{m+1}Q_{m+1} + \dots + k_p Q_p$$

$$b := j_{m-1}P_{m-2} + \dots + j_1 P$$

$$\bar{b} := j_1 Q_1 + \dots + j_{m-1} Q_{m-1}$$

oraz

$$u := e^{-2\pi i/P_m} \quad v := e^{-2\pi i/r_m}$$

A zatem w m -ym kroku:

$$\begin{aligned} S_m(\bar{b} + j_m Q_m + a) &= \sum_{k_m=0}^{r_m-1} e^{-2\pi i \left(\frac{j_m}{r_m} + \frac{b}{P_m} \right) k_m} S_{m-1}(\bar{b} + k_m Q_m + a) \\ &= \sum_{k_m=0}^{r_m-1} v^{j_m k_m} u^{b k_m} S_{m-1}(\bar{b} + k_m Q_m + a) \end{aligned}$$

dla $b = 0, 1, \dots, P_{m-1} - 1$, $a = 0, 1, \dots, Q_m - 1$, $j_m = 0, 1, \dots, r_m - 1$.

FFT. Algorytm Cooleya i Tukeya - cd

Można więc dla $m = 1, 2, \dots, p$ algorytm realizować następująco:

dla $b = 0, 1, \dots, P_{m-1} - 1$

dla $a = 0, 1, \dots, Q_m - 1$

- skalowanie, czyli

$$\text{dla } k = 0, 1, \dots, r_m - 1 \quad S'_{m-1}(\bar{b} + kQ_m + a) := u^{bk} S_{m-1}(\bar{b} + kQ_m + a)$$

- transformacja, czyli

$$\text{dla } j = 0, 1, \dots, r_m - 1 \quad S_{m-1}(\bar{b} + jQ_m + a) := \sum_{k=0}^{r_m-1} v^{jk} S'_{m-1}(\bar{b} + kQ_m + a)$$

FFT. Algorytm Cooleya i Tukeya - cd

Skalowanie i transformacja są równoważne mnożeniu odpowiednio przez macierze **D** i **T** postaci:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u^{2b} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \dots & u^{(r_m-1)b} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & v & \dots & \dots & v^{r_m-1} \\ \dots & v^2 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & v^{r_m-1} & v^{2(r_m-1)} & \dots & v^{(r_m-1)^2} \end{bmatrix}$$

i wymagają łącznie około r_m^2 mnożeń i tyle samo dodawań. Ogółem w m -tym kroku algorytmu trzeba wykonać $O(P_{m-1}Q_m r_m^2)$ działań. Ponieważ $P_{m-1}Q_m = \frac{n+1}{r_m}$, to w m -tym kroku jest $O((n+1)r_m)$ działań. Wobec tego koszt całego algorytmu jest równy $O((n+1)(r_1 + r_2 + \dots + r_p))$ zespolonych dodawań i mnożeń.

Algorytm FFT dla funkcji o wartościach rzeczywistych I

- Można wykorzystać alg. Cooleya i Tukeya do wyznaczenia rzeczywistych współczynników a_j i b_j (równania (2)) trygonometrycznego wielomianu interpolacyjnego w postaci (1) lub
- do obliczenia jego wartości w punktach $x_k = \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2n+1$.

Odpowiednikiem ZA i ZS są w tym wypadku zadania:

- RA - mając dane liczby rzeczyw. y_k , $k = 0, 1, \dots, 2n+1$ szukamy wielkości

$$a_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} y_k \cos \frac{\pi jk}{n+1} \quad j = 0, 1, \dots, n+1$$

oraz

$$b_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} y_k \sin \frac{\pi jk}{n+1} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

i zadanie odwrotne

Algorytm FFT dla funkcji o wartościach rzeczywistych II

- RS - przy danych współczynnikach rzeczyw. $a_j, j = 0, 1, \dots, n+1$, i $b_j, j = 1, 2, \dots, n$, wyznaczamy wartości

$$y_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left(a_j \cos \frac{\pi j k}{n+1} + b_j \sin \frac{\pi j k}{n+1} \right) + \frac{a_{n+1}}{2} (-1)^k$$

dla $k = 0, 1, \dots, 2n+1$.

Algorytmy Goertzela i Reinscha I

Przy obliczaniu wartości wielomianu w postaci (1) w punkcie ξ należy wyznaczyć wartości wyrażeń:

$$C(\xi) = \sum_{j=0}^n d_j \cos j\xi \quad S(\xi) = \sum_{j=1}^n d_j \sin j\xi$$

o rzeczyiw. współ. d_j .

Można zauważyć, że $C(\xi)$ jest częścią rzeczywistą, a $S(\xi)$ częścią urojoną wartości wielomianu rzeczywistego $w(z) = \sum_{j=0}^n d_j z^j$ w punkcie zespolonym

$\xi = \cos \xi + i \sin \xi$, tzn.

$$w(\xi) = C(\xi) + iS(\xi) \quad (5)$$

Do obliczenia $w(\xi)$ można zastosować alg. Hornera - wymaga w tym wypadku $4n - 2$ rzeczywistych mnożeń i $3n - 2$ rzeczywistych dodawań.

Istotnie mniejszy koszt ma *algorytm Goertzela*. Zauważmy, że wartość $w(\xi)$ jest równa reszcie z dzielenia w przez rzeczywisty trójmian kwadratowy $(z - \xi)(z - \bar{\xi}) = z^2 - 2 \cos \xi z + 1$ w punkcie $z = \xi$. Jeżeli bowiem

$$\sum_{j=0}^n d_j z^j = (z^2 - 2 \cos \xi z + 1) \sum_{j=2}^n e_j z^{j-2} + e_1 z + e_0 \quad (6)$$

Algorytmy Goertzela i Reinscha II

to

$$w(\xi) = (e_1 \cos \xi + e_0) + ie_1 \sin \xi \quad (7)$$

Z równości (5) - (7) wynika algorytm Goertzela

Algorytm Goertzela

```

c := cos(ξ)
en+1 := en+2 := 0
for j:=n step -1 until 0 do
    ej := dj + 2cej+1 - ej+2
    C(ξ) := e0 - ce1
    S(ξ) := e1sin(ξ)

```

Algorytm może dawać niepoprawne wyniki dla $|\xi| \ll 1$. Wynika to stąd, że zadanie jest źle uwarunkowane dla pomocniczej zmiennej $c = \cos(\xi)$, choć dla oryginalnej zmiennej ξ jest dobrze uwarunkowane.

Algorytm zmodyfikował Reinsch, i jest to algorytm numerycznie poprawny.

Algorytm Reinscha

```

 $e_{n+2} := \delta e_{n+1} := 0$ 
if  $\cos(\xi) > 0$  then
   $p := -4\sin^2(\xi/2)$ 
  for  $j:=n$  step  $-q$  until 0 do
     $e_{j+1} := \delta e_{j+1} + e_{j+2}$ 
     $\delta e_j := p e_{j+1} + \delta e_{j+1} + d_j$ 
else
   $p := 4\cos^2(\xi/2)$ 
  for  $j:=n$  step  $-1$  until 0 do
     $e_{j+1} := \delta e_{j+1} - e_{j+2}$ 
     $\delta e_j := p e_{j+1} - \delta e_{j+1} + d_j$ 
end
 $C(\xi) := \delta e_0 - p e_1 / 2$ 
 $S(\xi) := e_1 \sin(\xi)$ 

```

Można sprawdzić, że algorytm Reinscha wymaga $3n + 4$ rzeczywistych dodawań i tylko $n + 4$ rzeczywistych mnożeń (w alg. Hornera mnożeń było $4n - 2$).

Interpolacja funkcjami sklejanymi

Interpolacja funkcjami sklejanymi. Definicja zadania I

Niech (Δ) będzie układem punktów x_0, x_1, \dots, x_N dzielących przedział $[a, b]$ na N części:

$$(\Delta) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

W każdym z przedziałów $[x_i, x_{i+1}]$ przybliżamy f wielomanem ustalonego (zwykle niskiego) stopnia.

Istotne jest, aby przyjęte rozwiązanie w danym podprzedziale było ciągłe wraz z odpowiednimi pochodnymi na całym odcinku $[a, b]$.
Takie własności mają *funkcje sklejane*, ang. *spline*.

Interpolacja funkcjami sklejanymi. Definicja zadania II

Definicja funkcji sklejaney

Funkcją rzeczywistą S nazywamy *funkcją sklejaną* stopnia m z węzłami

$$(\Delta) a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

jeżeli

- w każdym przedziale (x_{i-1}, x_i) dla $i = 0, 1, \dots, N + 1$, gdzie $x_{-1} := -\infty$, $x_{N+1} := +\infty$, S jest wielomianem stopnia nie wyższego niż m ,
- S i jej pochodne rzędu $1, 2, \dots, m - 1$ są ciągłe na całym zbiorze rzeczywistym, $S \in C^{m-1}$.

W najprostszym przypadku, gdy $m = 1$, funkcja sklejana jest łamaną.

Z definicji wynika, że wielomiany są szczególnym przypadkiem funkcji sklejanych.

Splajn pierwszego stopnia

Przypadek najprostszy

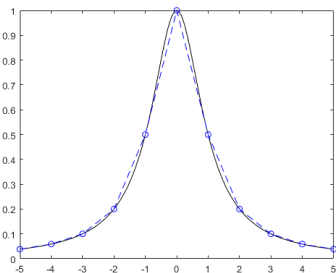
- Funkcje sklejane pierwszego stopnia → interpolacja liniowa pomiędzy węzłami x_i i x_{i+1} . Wykorzystując postać Newtona otrzymujemy:

$$y(x) = S_i(x) = y_i + \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i) \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

- Sformułowanie to spełnia warunek $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$

Przykład: funkcja

$y = 1/(1 + x^2)$ interpolowana
splajnami pierwszego stopnia



Splajny trzeciego stopnia (kubiczne)

- Wielomian stopnia n jest definiowany jednoznacznie przez $n + 1$ równań
→ kolejne równania można otrzymać z narzucenia warunku ciągłości pierwszej i kolejnych pochodnych
- Jest to sposób na wygładzenie krzywej interpolującej
- Splajn trzeciego stopnia w każdym z n przedziałów jest postaci:
 $S_i(x) = a_0^i + a_1^i x + a_2^i x^2 + a_3^i x^3$, $i = 0 \dots n - 1$ → potrzebnych jest $4n$ różnych warunków, żeby wyznaczyć współczynniki wszystkich splajnow
- Warunek interpolacji funkcjami sklejanymi z definicji daje dokładnie 2 równania dla każdego splajnu, czyli $2n$ równań postaci:

$$S_i(x_i) = y_i, \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 0 \dots n - 1$$

- Brakujące warunki otrzymujemy obliczając pierwsze i drugie pochodne i przyrównując je w połączeniach splajnow:

$$\begin{aligned} S_i'(x) &= \frac{dS_i(x)}{dx} = a_1^i + 2a_2^i x + 3a_3^i x^2 & S_i'(x_i) &= S_{i-1}'(x_i), \quad i = 1 \dots n - 1 \\ S_i''(x) &= \frac{d^2 S_i(x)}{dx^2} = 2a_2^i + 6a_3^i x & S_i''(x_i) &= S_{i-1}''(x_i), \quad i = 1 \dots n - 1 \end{aligned}$$

Pozostałe 2 warunki dla węzłów brzegowych można narzucić np. w postaci $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$

- Otrzymany układ $4n$ równań tworzy macierz przekątniową pasmową. Zadanie można rozwiązać przy użyciu np. metod eliminacji.

Przykładowe zadania i obliczenia

Interpolacja Lagrange'a. Obliczanie wartości funkcji I

Oblicz wartości poniższych funkcji dla zadanych wartości wykorzystując interpolację Lagrange'a

- $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x = 6$
- $f(x) = \log_{10} x$ dla $x = 40$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dla $x = 16$

Interpolacja Lagrange'a. Obliczanie wartości funkcji I

Rozważmy przykład $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x = 6$

- 1 Wybieramy punkty, co najmniej 3, dla których wartość funkcji $f(x)$ jest znana i takie, żeby punkt $x = 6$ leżał w środku wybranego przedziału:

$$\{x, f(x)\}: \{1, 1\}, \{4, 2\}, \{9, 3\}$$

- 2 Tworzymy z definicji wielomian interpolacyjny Lagrange'a

$$L_2(x) = f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

- 3 Obliczamy wartość dla $x = 6$

$$\begin{aligned} L_2(6) &= 1 \frac{(6-4)(6-9)}{(1-4)(1-9)} + 2 \frac{(6-1)(6-9)}{(4-1)(4-9)} + 3 \frac{(6-1)(6-4)}{(9-1)(9-4)} = \\ &= -\frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{4} = 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Interpolacja Lagrange'a. Postać Newtona I

- Postać Newtona wymaga obliczenia ilorazów różnicowych, które są równe współczynnikom postaci Newtona $b_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ oraz zachodzi:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

- Oblicz ilorazy różnicowe dla funkcji, o której wiemy, że przyjmuje następujące wartości:

$(x, f(x))$: (1, 1), (2, 5), (3, -6), (5, 2)

Iloraz różnicowy I rzędu:

$$f[1, 2] = \frac{f[2] - f[1]}{2 - 1} = \frac{5 - 1}{1} = 4$$

$$f[2, 3] = \frac{f[3] - f[2]}{3 - 2} = \frac{-6 - 5}{1} = -11$$

$$f[3, 5] = \frac{f[5] - f[3]}{5 - 3} = \frac{2 + 6}{2} = 4$$

Interpolacja Lagrange'a. Postać Newtona II

Iloraz różnicowy II rzędu:

$$f[1, 2, 3] = \frac{f[2,3]-f[1,2]}{3-1} = \frac{-11-4}{2} = -7\frac{1}{2}$$
$$f[2, 3, 5] = \frac{f[3,5]-f[2,3]}{5-2} = \frac{4+11}{3} = 5$$

Iloraz różnicowy III rzędu:

$$f[1, 2, 3, 5] = \frac{f[2, 3, 5] - f[1, 2, 3]}{5 - 1} = \frac{5 + 7\frac{1}{2}}{4} = 3\frac{1}{8}$$

- Podaj postać Newtona $W(x) = \sum_{k=0}^2 b_k p_k(x)$ dla wielomianu W w postaci naturalnej $W(x) = 2x^2 - 4x + 3$ oraz punktów $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

Interpolacja Lagrange'a. Postać Newtona III

Konstruujemy wielomiany p_i :

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = (x - x_0) = (x - 1)$$

$$p_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = (x - 1)(x - 2)$$

Obliczamy współczynniki b_i :

$$b_0 = f[x_0] = w(1) = 1$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{w(2) - w(1)}{2 - 1} = \frac{3 - 1}{1} = 2$$

$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - 2}{3 - 1} = \frac{\frac{w(3) - w(2)}{3 - 2} - 2}{2} = 2$$

Szukana postać Newtona wielomianu W :

$$W(x) = 1 + 2(x - 1) + 2(x - 1)(x - 2)$$

Reszta interpolacyjna I

- Reszta interpolacyjna r to

$$r(x) = f(x) - L_n(x)$$

- dokładna wartość funkcji f w punkcie x nie jest znana, dlatego korzystamy z twierdzenia
Istnieje punkt $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ taki, że

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} p_{n+1}(x)$$

przy czym zakładamy, że f ma ciągłą pochodną $(n+1)$. rzędu na przedziale $[a, b]$ zawierającym punkty x_0, x_1, \dots, x_n oraz x

Reszta interpolacyjna II

- Jaki jest błąd przy obliczaniu wartości funkcji \cos dla $5\pi/8$, jeśli znane są wartości tej funkcji dla $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi$
Szacujemy

$$r\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\cos^{(7)}(\xi(x))}{7!} \left(\frac{5\pi}{8} - 0\right) \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{3}\right) \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{5\pi}{8} - \pi\right) \leq \frac{\pi^7}{7!}$$

Postać Newtona I

- Wielomian Hermite'a w postaci Newtona

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^n b_l p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{s(i)+j} p_{s(i)+j}(x)$$

- Skonstruuj wielomian 4. stopnia W taki, że
 $W(0) = 1$, $W'(0) = 2$, $W(2) = 2$, $W'(2) = 1$, $W''(2) = 3$
Obliczamy indeksy

$$l = 0 = s(0) + 0$$

$$l = 1 = s(0) + 1$$

$$l = 2 = s(1) + 0$$

$$l = 3 = s(1) + 1$$

$$l = 4 = s(1) + 2$$

Postać Newtona II

Konstruujemy wielomiany p_i :

$$p_0(x) := 1$$

$$p_1(x) = p_{s(0)+1}(x) = (x - x_0) = x$$

$$p_2(x) = p_{s(1)+0}(x) = (x - x_0)^{m_0}(x - x_1)^0 = (x - 0)^2 = x^2$$

$$p_3(x) = p_{s(1)+1}(x) = (x - x_0)^{m_0}(x - x_1)^1 = (x - 0)^2(x - 2) = x^2(x - 2)$$

$$p_4(x) = p_{s(1)+2}(x) = (x - x_0)^{m_0}(x - x_1)^2 = (x - 0)^2(x - 2)^2 = x^2(x - 2)^2$$

Obliczamy współczynniki b_i (odpowiednie ilorazy różnicowe)

$$b_0 = b_{s(0)+0} = f[x_0, 1] = f[x_0] = W(x_0) = 1$$

$$b_1 = b_{s(0)+1} = f[x_0, 2] = \frac{f'(x_0)}{1!} = W'(0) = 2$$

$$b_2 = b_{s(1)+0} = f[x_0, 2, x_1, 1] = \frac{f[x_0, 1, x_1, 1] - f[x_0, 2]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1, 1] - f[x_0, 1]}{x_1 - x_0} \frac{1}{2} - W'(0) \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$b_3 = b_{s(1)+1} = f[x_0, 2, x_1, 2] = \frac{f[x_0, 1, x_1, 2] - f[x_0, 2, x_1, 1]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1, 2] - f[x_0, 1, x_1, 1]}{x_1 - x_0} \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$b_4 = b_{s(1)+2} = f[x_0, 2, x_1, 3] = \frac{f[x_0, 1, x_1, 3] - f[x_0, 2, x_1, 2]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1, 3] - f[x_0, 1, x_1, 2]}{x_1 - x_0} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2} - \frac{f[x_1, 2] - f[x_0, 1, x_1, 1]}{x_1 - x_0} \right) \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Szukany wielomian W jest postaci:

$$W(x) = 1 + 2x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2(x - 2) + \frac{1}{16}x^2(x - 2)^2$$

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Algorytmy dokładne

Problem

- $Ax = b$
 - A macierz $n \times n$
 - x szukany wektor o rozm. n
 - b wektor wyrazów wolnych o rozm. n

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2$$

...

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n$$

Metoda eliminacji Gaussa

- Postać macierzowa

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Dopisujemy do macierzy **A** wektor wyrazów wolnych **B** (macierz rozszerzona)

$$A | B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

- W kolejnych krokach rozpoczynamy przekształcanie rozszerzonej macierzy $\mathbf{A} | \mathbf{B}$ w macierz trójkątną górną
 - Etap ten nosi nazwę etapu eliminacji

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,1} & a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,2} & \dots & a_{2,n} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,n} & b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} a_{1,1} & a_{n,2} - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} a_{1,2} & \dots & a_{n,n} - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} a_{1,n} & b_n - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} b_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,2} & \dots & a_{2,n} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} a_{1,n} & b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} b_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,2} - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} a_{1,2} & \dots & a_{n,n} - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} a_{1,n} & b_n - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} b_1 \end{array} \right]$$

- Otrzymujemy macierz

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} & b'_n \end{array} \right]$$

$$a_{ii} \quad i = 0, n-1$$

$$a_{k,j} \quad k = i+1, n-1, \quad j = 0, n-1$$

$$a_{k,j} = a_{k,j} - a_{k,i} / a_{ii} * a_{ij}$$

$$b_k = b_k - a_{k,i} / a_{ii} * b_i$$

Metoda eliminacji Gaussa

- Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \dots & a'_{2,n-1} & a'_{2,n} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & \dots & a''_{3,n-1} & a''_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a'''_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \dots \\ b'''_n \end{bmatrix}$$

- Kolejne składowe x_i znajdujemy rekurencyjnie wg wzorów

$$x_n = \frac{b'''_n}{a'''_{n,n}}$$

$$x_i = \frac{b''_i - a''_{i,n}x_n - \dots - a''_{i,i+1}x_{i+1}}{a''_{i,i}}, \text{ dla } i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Metoda eliminacji Gaussa

- Przykład

$$4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 8$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2$$

- Po przekształceniach otrzymujemy postać

$$4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 8$$

$$2,5x_2 + x_3 + 3,5x_4 = 1$$

$$-2x_3 - 5x_4 = 4$$

$$-1,6x_4 = 3,2$$

Metoda eliminacji Gaussa

- Przykład – cd
- Wyznaczamy

$$x_4 = \frac{3,2}{-1,6} = -2$$

$$x_3 = \frac{4 + 5x_4}{-2} = \frac{4 + 5 * (-2)}{-2} = \frac{4 - 10}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1 - 3,5x_4 - x_3}{2,5} = \frac{1 - 3,5 * (-2) - 3}{2,5} = \frac{1 + 7 - 3}{2,5} = \frac{5}{2,5} = 2$$

$$x_1 = \frac{8 + 2x_4 - 4x_3 + 2x_2}{4} = \frac{8 + 2 * (-2) - 4 * 3 + 2 * 2}{4} = \frac{8 - 4 - 12 + 4}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Eliminacja Gaussa-Crouta

- Algorytm eliminacji Gaussa posiada dosyć istotną wadę
- Bazuje on na dzieleniu przez elementy przekątnej głównej macierzy współczynników
- Może się zdarzyć, iż element przekątnej głównej jest równy zero lub zostanie wyzerowany w wyniku obliczeń
- Ulepszeniem algorytmu eliminacji Gaussa jest metoda Crouta
 - na początku eliminacji wyszukujemy w wierszu macierzy **AB** element o największym module
 - zamieniamy miejscami kolumnę ze znalezionym elementem z kolumną zawierającą element głównej przekątnej
 - w ten sposób dzielnik będzie posiadał największą wartość ze względu na moduł
 - pozbędziemy się sytuacji, gdy może on posiadać wartość 0 (chyba że cały wiersz macierzy **AB** jest zerowy – ale wtedy równania i tak się nie da rozwiązać).

Eliminacja Gaussa-Crouta

- Zmodyfikowany algorytm eliminacji Gaussa wymaga zapamiętania, które kolumny zostały zamienione
 - na etapie wyznaczania niewiadomych musimy znać numery wyliczanych niewiadomych
- Wprowadzamy do algorytmu dodatkowy wektor **W** przechowujący informację o numerach kolumn
 - zamiana miejscami kolumn nie wymaga faktycznego ich przemieszczania w pamięci – wystarczy odwoływać się do nich poprzez wektor kolumn
- Jeśli w wektorze **W** zamienimy ze sobą numery dwóch kolumn (są to tylko dwa elementy, zatem wymiana jest w czasie stałym), to efekt będzie taki, jakby te kolumny zostały zamienione miejscami w macierzy **AB**

Rozkład LU

- Daną macierz kwadratową $\mathbf{A}_{n \times n}$ rozłożyć na dwie macierze
 - trójkątną dolną $\mathbf{L}_{n \times n}$ o elementach głównej przekątnej równych 1
 - i
 - trójkątną górną $\mathbf{U}_{n \times n}$, takich że

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{L}_{n \times n} \times \mathbf{U}_{n \times n}$$

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{n \times n} \times \mathbf{U}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \dots & 1 & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n-1} & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n-1} & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \dots & u_{3,n-1} & u_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie rozkładu LU

Algorytm Doolittle'a

- Z mnożenia macierzy otrzymujemy

$$A_{n \times n} = L_{n \times n} \times U_{n \times n}$$

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n l_{i,k} \times u_{k,j}$$

- Macierze L i U są macierzami trójkątnymi -> część ich elementów jest równa zero

- Otrzymujemy dwa przypadki w zależności od indeksów i oraz j
- $i \leq j$, czyli element macierzy A $a_{i,j}$ leży na głównej przekątnej lub ponad nią. W takim przypadku ostatnim, niezerowym elementem w wierszu i -tym macierzy L jest element $l_{i,i}$
- Ogólny wzór redukuje się do postaci

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^i l_{i,k} \times u_{k,j}$$

- Dodatkowo z postaci macierzy L wiemy, iż element $l_{i,i}$, leżący na głównej przekątnej, jest zawsze równy 1, stąd

$$a_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \right) + u_{i,j}$$

Wyznaczanie rozkładu LU

Algorytm Doolittle'a

- Można zatem wyliczyć element $u_{i,j}$ o ile są znane poprzednie elementy macierzy L i U

$$(1) \quad u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j}$$

- $i > j$, czyli element macierzy A $a_{i,j}$ leży pod główną przekątną
- W tym przypadku ostatnim, niezerowym elementem w j -tej kolumnie macierzy U jest $u_{j,j}$
- Wzór wyjściowy redukuje się do postaci

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^j l_{i,k} \times u_{k,j}$$
$$a_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \right) + l_{i,j} \times u_{j,j}$$

- Otrzymany wzór pozwala wyliczyć element $l_{i,j}$ o ile znane są poprzednie elementy macierzy L i U

$$(2) \quad l_{i,j} = \frac{1}{u_{j,j}} \times \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \right)$$

Wyznaczanie rozkładu LU

Algorytm Doolittle'a

- W ten sposób otrzymaliśmy algorytmu Doolittle'a wyznaczania rozkładu macierzy \mathbf{A} na iloczyn dwóch macierzy \mathbf{L} i \mathbf{U} (*LU matrix decomposition*)
- Kolejne kroki algorytmu
 - Utwórz dwie macierze \mathbf{L} i \mathbf{U} o stopniu macierzy \mathbf{A} ;
 - Macierze \mathbf{L} i \mathbf{U} wyzeruj;
 - W macierzy \mathbf{L} elementom na głównej przekątnej przypisz wartość 1
 - Dla $j = 1, 2, \dots, n$ wykonuj
 - Dla $i = 1, 2, \dots, j$ wykorzystaj równanie (1) do wyznaczenia elementów $u_{i,j}$
 - Dla $i = j+1, j+2, \dots, n$ wykorzystaj równanie (2) do wyznaczenia elementów $l_{i,j}$

$$(1) \quad u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j}$$

$$(2) \quad l_{i,j} = \frac{1}{u_{j,j}} \times (a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} \times u_{k,j})$$

Wyznaczanie rozkładu LU

Algorytm Doolittle'a

- Przykład

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = L_{3 \times 3} \times U_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

$j = 1$

$i = 1, i = j$, zatem wyznaczamy $u_{1,1}$:

$$u_{1,1} = a_{1,1} - \sum_{k=1}^0 l_{1,k} \times u_{k,1} = a_{1,1}$$

$i = 2, i > j$, wyznaczamy $l_{2,1}$:

$$l_{2,1} = \frac{1}{u_{1,1}} \times (a_{2,1} - \sum_{k=1}^0 l_{2,k} \times u_{k,1}) = \frac{1}{u_{1,1}} \times a_{2,1}$$

$i = 3, i > j$, wyznaczamy $l_{3,1}$:

$$l_{3,1} = \frac{1}{u_{1,1}} \times (a_{3,1} - \sum_{k=1}^0 l_{3,k} \times u_{k,1}) = \frac{1}{u_{1,1}} \times a_{3,1}$$

Wyznaczanie rozkładu LU

Algorytm Doolittle'a

- Przykład

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = L_{3 \times 3} \times U_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

$j = 1$

$i = 1, i = j$, zatem wyznaczamy $u_{1,1}$:

$$u_{1,1} = a_{1,1} - \sum_{k=1}^0 l_{1,k} \times u_{k,1} = a_{1,1}$$

$i = 2, i > j$, wyznaczamy $l_{2,1}$:

$$l_{2,1} = \frac{1}{u_{1,1}} \times (a_{2,1} - \sum_{k=1}^0 l_{2,k} \times u_{k,1}) = \frac{1}{u_{1,1}} \times a_{2,1}$$

$i = 3, i > j$, wyznaczamy $l_{3,1}$:

$$l_{3,1} = \frac{1}{u_{1,1}} \times (a_{3,1} - \sum_{k=1}^0 l_{3,k} \times u_{k,1}) = \frac{1}{u_{1,1}} \times a_{3,1}$$

$j = 2$

$i = 1, i < j$, wyznaczamy $u_{1,2}$:

$$u_{1,2} = a_{1,2} - \sum_{k=1}^0 l_{1,k} \times u_{k,2} = a_{1,2}$$

$i = 2, i = j$, wyznaczamy $u_{2,2}$:

$$u_{2,2} = a_{2,2} - \sum_{k=1}^1 l_{2,k} \times u_{k,2} = a_{2,2} - l_{2,1} \times u_{1,2}$$

$i = 3, i > j$, wyznaczamy $l_{3,2}$:

$$l_{3,2} = \frac{1}{u_{2,2}} \times (a_{3,2} - \sum_{k=1}^1 l_{3,k} \times u_{k,2}) = \frac{1}{u_{2,2}} \times (a_{3,2} - l_{3,1} \times u_{1,2})$$

Wyznaczanie rozkładu LU

Algorytm Doolittle'a

- Przykład

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = L_{3 \times 3} \times U_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

$j = 1$ $i = 1, i = j$ $u_{1,1} = a_{1,1}$ $i = 2, i > j$ $l_{2,1} = \frac{1}{u_{1,1}}$ $i = 3, i > j$ $l_{3,1} = \frac{1}{u_{1,1}}$	$j = 3$ $i = 1, i < j$, wyznaczamy $u_{1,3}$: $u_{1,3} = a_{1,3} - \sum_{k=1}^0 l_{1,k} \times u_{k,3} = a_{1,3}$ $i = 2, i < j$, wyznaczamy $u_{2,3}$: $u_{2,3} = a_{2,3} - \sum_{k=1}^1 l_{2,k} \times u_{k,3} = a_{2,3} - l_{2,1} \times u_{1,3}$ $i = 3, i = j$, wyznaczamy $u_{3,3}$: $u_{3,3} = a_{3,3} - \sum_{k=1}^2 l_{3,k} \times u_{k,3} = a_{3,3} - l_{3,1} \times u_{1,3} - l_{3,2} \times u_{2,3}$	$i = 1, i < j$, wyznaczamy $u_{1,2}$: $u_{1,2} = a_{1,2} - \sum_{k=1}^0 l_{1,k} \times u_{k,2} = a_{1,2}$ $i = 2, i = j$, wyznaczamy $u_{2,2}$: $u_{2,2} = a_{2,2} - \sum_{k=1}^1 l_{2,k} \times u_{k,2} = a_{2,2} - l_{2,1} \times u_{1,2}$ $i = 3, i > j$, wyznaczamy $l_{3,2}$: $l_{3,2} = \frac{1}{u_{2,2}} \times (a_{3,2} - \sum_{k=1}^1 l_{3,k} \times u_{k,2}) = \frac{1}{u_{2,2}} \times (a_{3,2} - l_{3,1} \times u_{1,2})$
--	--	--

Wyznaczanie rozkładu LU

Algorytm Doolittle'a

- Przykład

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = L_{3 \times 3} \times U_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

$j = 1$ $i = 1, i = j$ $u_{1,1} = a_{1,1}$ $i = 2, i > j$ $l_{2,1} = \frac{1}{u_{1,1}}$ $i = 3, i > j$ $l_{3,1} = \frac{1}{u_{1,1}}$	$j = 3$ $i = 1, i < j$, wyznaczamy $u_{1,3}$: $u_{1,3} = a_{1,3} - \sum_{k=1}^0 l_{1,k} \times u_{k,3} = a_{1,3}$ $i = 2, i < j$, wyznaczamy $u_{2,3}$: $u_{2,3} = a_{2,3} - \sum_{k=1}^1 l_{2,k} \times u_{k,3} = a_{2,3} - l_{2,1} \times u_{1,3}$ $i = 3, i = j$, wyznaczamy $u_{3,3}$: $u_{3,3} = a_{3,3} - \sum_{k=1}^2 l_{3,k} \times u_{k,3} = a_{3,3} - l_{3,1} \times u_{1,3} - l_{3,2} \times u_{2,3}$
--	--

wyznaczamy $u_{1,2}$:

$$u_{1,2} = a_{1,2} - \sum_{k=1}^0 l_{1,k} \times u_{k,2} = a_{1,2}$$

wyznaczamy $u_{2,2}$:

$$u_{2,2} = a_{2,2} - \sum_{k=1}^1 l_{2,k} \times u_{k,2}$$

Dla przykładowych danych:

wyznaczamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie rozkładu LU

Algorytm Doolittle'a

- W przykładzie
 - Potrzebne w równaniach (1) i (2) elementy macierzy L i U są zawsze wyliczane wcześniej
 - We wszystkich równaniach elementy macierzy A są używane tylko jeden raz
 - Wniosek:
 - macierze L i U mogą zostać umieszczone w miejscu macierzy A (operacja będzie wykonana *in situ*) i zaoszczędzimy pamięć
 - W macierzy L istotna jest tylko część leżąca pod główną przekątną. Elementy przekątnej są zawsze równe 1, a elementy leżące nad przekątną są równe zero i nie musimy ich wcale zapamiętywać.
 - w macierzy U istotna staje się tylko główna przekątna oraz elementy leżące nad nią, pozostałe elementy są równe zero i również nie musimy ich zapamiętywać
 - Algorytm Doolittle'a może przekształcać macierz A w połączone macierze L i U :

$$\begin{bmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
 a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
 a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n}
 \end{bmatrix}
 \rightarrow
 \begin{bmatrix}
 u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n-1} & u_{1,n} \\
 l_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n-1} & u_{2,n} \\
 l_{3,1} & l_{3,2} & u_{3,3} & \dots & u_{3,n-1} & u_{3,n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \dots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
 l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} & \dots & l_{n,n-1} & u_{n,n}
 \end{bmatrix}$$

Problem. Rozwiązanie z zastosowaniem LU

- Znaleźć rozwiązanie układu równań liniowych postaci

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2$$

...

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n$$

wykorzystując rozkład LU

- Postać macierzowa

$$\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

- Rozkładamy macierz \mathbf{A} na \mathbf{L} i \mathbf{U}

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \times \mathbf{U}$$

- Przekształcamy
- $$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{X} &= \mathbf{B} \\ (\mathbf{L} \times \mathbf{U}) \times \mathbf{X} &= \mathbf{B} \\ \mathbf{L} \times (\mathbf{U} \times \mathbf{X}) &= \mathbf{B} \end{aligned}$$

- Obliczamy wektor \mathbf{Y}
- $$\mathbf{L} \times \mathbf{Y} = \mathbf{B}$$

- A następnie mając \mathbf{Y} obliczamy wektor \mathbf{X} , który jest rozwiązaniem układu równań

$$\mathbf{U} \times \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Problem. Rozwiązanie z zastosowaniem LU

- Korzyścią tego rozwiązania jest to, że macierze L i U ze względu na swoją postać pozwalają na bardzo proste wyliczenie Y i X

- podstawiając w przód

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} y_j, \text{ dla } i = 2, 3, \dots, n$$

- podstawiając wstecz

$$x_n = \frac{y_n}{u_{n,n}}$$

$$x_i = \frac{1}{u_{i,i}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{i,j} x_j \right), \text{ dla } i = n-1, n-2, \dots, 1$$

- Wektor pomocniczy Y może być w pamięci komputera przechowywany w wektorze X (oszczędność miejsca)
- To podejście szczególnie jest przydatne w przypadku konieczności rozwiązywania wielu układów równań, które różnią się jedynie wektorem wyrazów wolnych B
 - W takim przypadku dokonujemy jednokrotnie rozkładu LU macierzy współczynników A , a następnie wymieniając jedynie wektor B rozwiązujemy kolejne układy przy pomocy wyliczonych wcześniej macierzy L i U .

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Duże układy równań liniowych

Zagadnienie

- Niech zadane będą
 - $A=(a_{ij})$ - macierz n na n , odwracalna,
 - $b = (b_j)$ - wektor o długości n
- Szukamy rozwiązania $x = (x_j)$ układu równań $Ax = b$
- W odróżnieniu od ogólnego zagadnienia rozwiązywania układu równań liniowych rozpatrujemy układy równań powstałe z dyskretyzacji równania różniczkowego metodami elementu skończonego lub różnic skończonych
- Wtedy macierz A jest bardzo duża, ale zawiera tylko ok. 10% niezerowych elementów
 - macierz rzadka

Zagadnienie

- Używanie bezpośrednich metod rozwiązywania układów równań liniowych
 - Mało efektywne, ponieważ podczas szukania rozkładu macierzy na macierz dolno- i górnotrójkątną następuje utrata wyzerowanych miejsc
 - Przy dużych rozmiarach macierzy wypełnienie wyzerowanych miejsc spowodowałoby znaczne powiększenie potrzebnej pamięci
- Do rozwiązywania tego typu zagadnień stosuje się metody iteracyjne:
 - Klasyczne metody iteracyjne
 - Metody projekcji
 - Metody Kryłowa

Klasyczne metody iteracyjne

- Definiujemy rozkład macierzy $A=M-N$
 - gdzie M jest macierzą odwracalną
- Układ $Ax=b$ przekształcamy w następujący równoważny układ:

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

- lub:

$$x = M^{-1}(M - A)x + M^{-1}b$$

- Z tego wynika prosta metoda iteracyjna:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}(M - A)x^{(k)} + M^{-1}b$$

- Macierz M powinna być dobrym przybliżeniem A (szybka zbieżność) i łatwo odwracalna

Klasyczne metody iteracyjne

- Macierz M powinna być dobrym przybliżeniem A (szybka zbieżność) i łatwo odwracalna
 - Najprostsza klasyczna metoda iteracyjna
 - Metoda Richardsona
 - Metoda Jakobiego
 - Metoda Gaussa-Seidela
 - Metoda SOR
 - Metoda SSOR

Klasyczne metody iteracyjne

- Najprostsza klasyczna metoda iteracyjna

$$M = I, N = I - A$$

$$x^{(k+1)} = (I - A)x^{(k)} + b$$

- Metoda Richardsona

$$M = I, N = I - A$$

– i wprowadzamy parametr relaksacji ω

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)})$$

Klasyczne metody iteracyjne

- Metoda Jakobiego

- Przyjmując $A = D - E - F$

- gdzie D jest macierzą diagonalną
- E poddiagonalną
- F naddiagonalną

- dla metody Jakobiego dobieramy:

$$M = D, N = E + F$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b$$

- bądź

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

Klasyczne metody iteracyjne

- Metoda Gaussa-Seidela

- Przyjmując $A = D - E - F$

- gdzie D jest macierzą diagonalną, E poddiagonalną i F naddiagonalną

- dla metody Gaussa-Seidela dobieramy

- albo ('do przodu') $M = D - E$, $N = F$

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} Fx^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

- bądź

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

- albo ('do tyłu') $M = D - F$, $N = E$

$$x^{(k+1)} = (D - F)^{-1} Ex^{(k)} + (D - F)^{-1} b$$

- bądź

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k+1)} \right), \quad i = n, \dots, 1$$

Klasyczne metody iteracyjne

- Metoda SOR
 - Oparta na metodzie Gaussa-Seidela
 - Przyjmując $A = D - E - F$
 - gdzie D jest macierzą diagonalną, E poddiagonalną i F naddiagonalną
 - dla metody SOR dobieramy
 - albo ('do przodu') $M = \frac{1}{\omega}(D - \omega E)$, $N = \frac{1}{\omega}(\omega F + (1 - \omega)D)$

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= (D - \omega E)^{-1}[\omega F + (1 - \omega)D]x^{(k)} + (D - \omega E)^{-1}\omega b \\ &= \omega T_{GS}(x^{(k)}) + (1 - \omega)x^{(k)},\end{aligned}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega)x_i^{(k)}, i = 1, \dots, n$$

Klasyczne metody iteracyjne

- Metoda SOR – c.d.

- dla metody SOR dobieramy

- albo ('do tyłu') $M = \frac{1}{\omega}(D - \omega F)$, $N = \frac{1}{\omega}(\omega E + (1 - \omega)D)$

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= (D - \omega F)^{-1}[\omega E + (1 - \omega)D]x^{(k)} + (D - \omega F)^{-1}\omega b \\ &= \omega T_{GS}(x^{(k)}) + (1 - \omega)x^{(k)}\end{aligned}$$

Klasyczne metody iteracyjne

- Metoda SSOR

- Przyjmując $A = D - E - F$

- gdzie D jest macierzą diagonalną, E poddiagonalną i F naddiagonalną

- dla metody SSOR dobieramy

$$M = \frac{1}{\omega(2-\omega)} (D - \omega E) D^{-1} (D - \omega F)$$

$$x^{(k+1/2)} = (D - \omega E)^{-1} [\omega F + (1 - \omega) D] x^{(k)} + \omega (D - \omega E)^{-1} \omega b$$

$$x^{(k+1)} = (D - \omega F)^{-1} [\omega E + (1 - \omega) D] x^{(k+1/2)} + \omega (D - \omega F)^{-1} \omega b$$

Metody projekcji

- W metodzie projekcji chcemy znaleźć przybliżenie \tilde{x} rozwiązania x układu równań $Ax = b$ w postaci

$$\tilde{x} \in x_0 + \mathcal{K}_m \subset R^n, \dim \mathcal{K}_m = m \leq n$$

- tak, aby

$$b - A\tilde{x} \perp \mathcal{L}_m \subset R^n, \dim \mathcal{L}_m = m \leq n$$

Metody projekcji

- Jeśli założymy, że $\mathcal{K} = \text{span}\{v_i\}_{i=1,\dots,m}$, $V = [v_1, \dots, v_m]$
 $\mathcal{L} = \text{span}\{w_i\}_{i=1,\dots,m}$, $W = [w_1, \dots, w_m]$
- to dla $x = x_0 + Vy \in x_0 + \mathcal{K}$ warunek ortogonalności $b - A\tilde{x} \perp \mathcal{L}_m$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $W^T AVy = W^T r_0$
- Jeśli macierz $W^T AV$ jest nieosobliwa, to otrzymujemy
$$x = x_0 + Vy = x_0 + V(W^T AV)^{-1}W^T r_0$$
- oraz

Metody projekcji

- 'prototypową' metodę projekcji:

dopóki metoda nie zbiega

wybierz \mathcal{K} i \mathcal{L}

wybierz bazy $V = [v_1, \dots, v_m]$, $W = [w_1, \dots, w_m]$

$$r = b - Ax_0$$

oblicz y : $W^T AVy = W^T r$

$$x = x_0 + Vy$$

$$x_0 = x$$

koniec pętli

Metody projekcji

- Okazuje się, że macierz $W^T A V$ jest nieosobliwa dla dowolnych baz W i V przestrzeni \mathcal{K} i \mathcal{L} jeśli spełniony jest jeden z następujących warunków:
- A jest dodatnio określona i $\mathcal{K} = \mathcal{L}$
- A jest nieosobliwa i $\mathcal{L} = A\mathcal{K}$

Metody projekcji

Przykład 1D

- Dla jednowymiarowej metody projekcji założymy, że:
 $\mathcal{K} = \text{span}\{v\}, \quad \mathcal{L} = \text{span}\{w\}$

- Szukamy

$$\tilde{x} = x + \alpha v$$

tak, aby $b - A\tilde{x} \perp \mathcal{L} \Leftrightarrow r - \alpha Av \perp w$

czyli
$$\alpha = \frac{(r, w)}{(Av, w)}$$

- Metoda największego spadku (Steepest Descent)
- Metoda najmniejszego residuum (Minimal Residual MINRES)
- Metoda najmniejszego residuum w kierunku największego spadku (Residual Norm Steepest Descent)

Metody projekcji

Metoda największego spadku (Steepest Descent)

- Niech A będzie macierzą symetryczną, dodatnio określoną, $v=r$, $w=r$

dopóki nie ma zbieżności

$$r = b - Ax_0$$

$$\alpha = \frac{(r, r)}{(Ar, r)}$$

$$\tilde{x} = x_0 + \alpha r$$

koniec pętli

- W każdym kroku \tilde{x} minimalizuje funkcję

$$f(x) = \|x - x_*\|_A^2 = (A(x - x_*), x - x_*)$$
 w przestrzeni wszystkich

wektorów postaci $x_0 + \alpha d$, przy czym $d = -\nabla f$ jest kierunkiem największego spadku (steepest descent), a jest x_* dokładnym rozwiązaniem układu równań.

Metody projekcji

Metoda najmniejszego residuum (Minimal Residual MINRES)

- Niech $A > 0$, $v=r$, $w=Ar$

dopóki nie ma zbieżności

$$r = b - Ax_0$$

$$\alpha = \frac{(Ar, r)}{(Ar, Ar)}$$

$$\tilde{x} = x_0 + \alpha r$$

koniec pętli

- W każdym kroku \tilde{x} minimalizuje wektor residualny

$$f(x) = \|b - Ax\|_2^2 = \|r\|_2^2$$

Metody projekcji

Metoda najmniejszego residuum w kierunku największego spadku (Residual Norm Steepest Descent)

- Dla macierzy A nieosobliwej $v = A^T r$, $w = Av$, mamy $\alpha = \frac{\|v\|_2^2}{\|Av\|_2^2}$

$$r_0 = b - Ax_0$$

dopóki nie ma zbieżności

$$v = A^T r_0$$

$$\text{oblicz } Av, \alpha = \frac{\|v\|_2^2}{\|Av\|_2^2}$$

$$\tilde{x} = x_0 + \alpha v$$

$$\tilde{r} = r_0 - \alpha Av$$

koniec pętli

- W każdym kroku \tilde{x} minimalizuje wektor residualny $f(x) = \|b - Ax\|_2^2$ szukając minimum w kierunku $-\nabla f$
- Metoda jest równoważna metodzie największego spadku dla równań normalnych $A^T Ax = A^T b$

Metody Kryłowa

Definicja metody

- Metody Kryłowa są metodami projekcji na podprzestrzeń Kryłowa

$$\mathcal{K}_m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{m-1}r_0\}, \quad r_0 = b - Ax_0$$

- Metody te różnią się podprzestrzeniami \mathcal{L}_m
- Metody znalezienia bazy ortogonalnej
- Ortogonalne metody projekcji na przestrzeń Kryłowa
- Ukośne metody projekcji na przestrzeń Kryłowa

Metody numeryczne

Kwadratury

IT, WIMiP

Danuta Szeliga

AGH Kraków

Spis treści I

- 1 Spis treści
- 2 Pojęcia podstawowe
- 3 Sformułowanie zadania
- 4 Zbieżność ciągu kwadratur
- 5 Kwadratury interpolacyjne
- 6 Kwadratury Newtona-Cotesa
- 7 Kwadratury Gaussa
- 8 Metoda Monte Carlo

Pojęcia podstawowe

Zagadnienia

- Obliczanie całek oznaczonych funkcji rzeczywistych jednej zmiennej
- Obliczanie całek niewłaściwych, przybliżone całkowanie funkcji mających osobliwości
- Obliczanie całek wielokrotnych
- Całka oznaczona. Niech f - funkcja określona i ograniczona na odcinku $[a, b]$. *Całką oznaczoną Riemanna* funkcji f na $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$, nazywamy granicę sum

$$S_n = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) f(\tilde{x}_i) \tag{1}$$

gdzie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$ jest dowolnym podziałem odcinka $[a, b]$ takim, że $\max_{0 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i| \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, $\tilde{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ są dowolnymi punktami pośrednimi.

Sformułowanie zadania I

- W wielu przypadkach, nawet jeśli znana jest postać analityczna funkcji pierwotnej F dla funkcji f , to przy obliczaniu całki na podstawie podstawowego twierdzenia rachunku całkowego:

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$
, wartość prawej strony może być jedynie aproksymowana numerycznie

- Przykład: obliczanie całki $\int_1^2 \frac{dx}{x^{1.0001}}$

Funkcją pierwotną jest $F(x) = \frac{x^{-0.0001}}{-0.0001}$ i stąd $I = \frac{1-2^{-0.0001}}{0.0001}$. Tę znaną wartość całki musimy teraz wyrazić numerycznie. Dokładność wyniku zależy będzie od dokładności obliczeń potęgowania $2^{-0.0001}$

- Funkcjonał liniowy, którym jest całka, oznaczamy przez I :

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx$$

Sformułowanie zadania II

- Zadanie przybliżonego obliczania całek to aproksymacja funkcjonału I innymi, prostszymi do obliczania funkcjonałami. W praktyce znamy funkcję podcałkową f i ewentualnie jej kolejne pochodne. Wobec tego całka $\int_a^b f(x)dx$ przybliżana jest funkcjonałami Q postaci:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n_0} A_{i,0} f(x_{i,0}) + \sum_{i=1}^{n_1} A_{i,1} f'(x_{i,1}) + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} A_{i,k} f^{(k)}(x_{i,k}) \quad (2)$$

Funkcjonał Q to *kwadratura liniowa*,
 współczynniki $A_{i,j}$ to *współczynniki kwadratury*,
 punkty $x_{i,j}$ to *węzły kwadratury*

Sformułowanie zadania III

- Bardziej ogólna postać dla Q :

$$I_p(f) := \int_a^b p(x)f(x)dx$$

gdzie p to funkcja wagowa, nieujemna na odcinku $[a, b]$, zerująca się w nim w skończonej liczbie punktów i całkowna, tzn.

$$\int_a^b p(x)dx < \infty$$

- Najczęściej stosowane kwadratury korzystają jedynie z wartości funkcji f i mają postać:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \tag{3}$$

Można je uważać za uogólnienie sum częściowych Riemanna (1) Kwadratury (3) mają $2n + 3$ parametry: n , węzły x_0, x_1, \dots, x_n i współczynniki A_0, A_1, \dots, A_n , które muszą zostać określone.

Sformułowanie zadania IV

Kwadratura rzędu n

Definicja. Mówimy, że kwadratura Q jest rzędu n , jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia mniejszego od n , $Q(w) = I_p(w)$ dla $w \in W_{n-1}$ oraz istnieje wielomian stopnia n , dla którego $Q(w_n) \neq I_p(w_n)$

Zbieżność ciągu kwadratur I

- Rozpatrzmy ciąg kwadratur Q_n , $n = 0, 1, \dots$:

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) \tag{4}$$

przybliżających całkę $I_p(f) := \int_a^b p(x)f(x)dx$.

- Zakładamy, że dane są nieskończone macierze trójkątne węzłów $x_i^{(j)}$ i współczynników $A_i^{(j)}$ definiujące ciąg (4):

$x_0^{(0)}$				$A_0^{(0)}$			
$x_0^{(1)}$	$x_1^{(1)}$			$A_0^{(1)}$	$A_1^{(1)}$		
$x_0^{(2)}$	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$		$A_0^{(2)}$	$A_1^{(2)}$	$A_2^{(2)}$	
...

Zbieżność ciągu kwadratur II

Twierdzenie

Ciąg kwadratur (4) jest zbieżny dla dowolnych funkcji f ciągłych na odcinku $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) = \int_a^b p(x) f(x) dx$$

wtw, gdy:

(a) ciąg (4) jest zbieżny dla dowolnego wielomianu

oraz

(b) istnieje taka stała K , że dla $n = 0, 1, \dots$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=0}^n |A_i^{(n)}| \leq K$$

Wnioskiem z tego twierdzenia jest następujące twierdzenie:

Zbieżność ciągu kwadratur III

Twierdzenie

Jeżeli wszystkie współczynniki $A_i^{(n)}$ ciągu kwadratur (4) są nieujemne, to warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności tego ciągu dla dowolnych funkcji ciągłych na odcinku $[a, b]$ jest jego zbieżność dla dowolnych wielomianów.

Kwadratury interpolacyjne I

- Kwadraturę postaci $Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ można otrzymać przez całkowanie wielomianu lub funkcji sklejaney interpolującej funkcję podcałkową
- Przykład. Funkcję f przybliżamy wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a opartym na węzłach a i b :

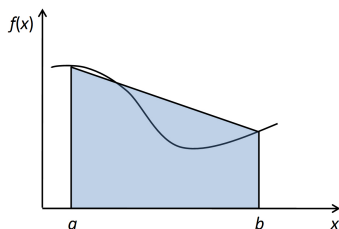
$$f(x) \approx L_1(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a}$$

Całkując wielomian L_1 otrzymujemy kwadraturę

$$\begin{aligned} Q(f) &:= I(L_1) = \int_a^b \left(f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a} \right) dx & (5) \\ &= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) \end{aligned}$$

Metoda nosi nazwę *metody trapezów* - interpretacja geometryczna

Kwadratury interpolacyjne II



- Przykład. S_1 - naturalna funkcja sklejana stopnia pierwszego z węzłami $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ interpolująca funkcję f . W każdym z przedziałów $[x_i, x_{i+1}]$ funkcja S_1 określona jest jako:

$$S_1(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

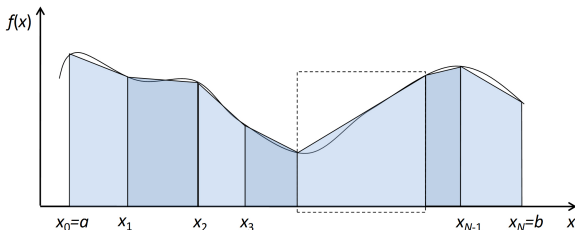
Kwadratury interpolacyjne III

Całkując S_1 otrzymujemy kwadraturę

$$\begin{aligned}
 Q(f) &:= I(S_1) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_1(x) dx & (6) \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} f(x_i) + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} f(x_{i+1}) \right)
 \end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna - przybliżanie pola trapezu krzywoliniowego sumą pól trapezów o wysokościach $x_{i+1} - x_i$ i podstawach $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$

Kwadratury interpolacyjne IV



- Kwadratura (5) to *kwadratura interpolacyjna*.

Kwadratura interpolacyjna to kwadratura otrzymana przez całkowanie wielomianów Hermite'a (w szczególności Lagrange'a) funkcji podcałkowej f .

Wielomian interpolacyjny Hermite'a $H_n = H_{n,f}$ jest jednoznacznie określony warunkami:

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

gdzie x_i to ustalone węzły o krotności m_i i $\sum_{i=0}^k m_i = n + 1$.

Kwadratury interpolacyjne V

Spełnia on równanie:

$$f(x) = H_{n,f}(x) + r(x) \tag{7}$$

gdzie $r(x)$ jest resztą wzoru interpolacyjnego.

Całkując równanie (7) otrzymujemy

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)H_{n,f}(x)dx + \int_a^b p(x)r(x)dx \tag{8}$$

Kwadratury interpolacyjne są więc postaci:

$$Q(f) = I_p(H_{n,f}) \tag{9}$$

Reszta jest postaci:

$$R(f) = I_p(r) \tag{10}$$

Kwadratury interpolacyjne VI

i może być wyrażona jako:

$$R(f) = \int_a^b p(x)p_{n+1}(x)f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]dx \quad (11)$$

gdzie

$$p_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^k (x - x_i)^{m_i} \quad (12)$$

Jeżeli $f \in C_{[a,b]}^{n+2}$, to resztę można zapisać jako:

$$R(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b p(x)p_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\xi(x))dx \quad (13)$$

- Można pokazać, że kwadratury interpolacyjne oparte na węzłach o łącznej krotności $n + 1$ są rzędu co najmniej $n + 1$.

Kwadratury Newtona-Cotesa I

Kwadratura Newtona-Cotesa

Kwadraturą Newtona-Cotesa przybliżającą $\int_a^b f(x)dx$ jest nazywana kwadratura postaci:

$$Q(f) = I(L_n)$$

gdzie L_n jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji f opartym na równoodległych węzłach $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = a + nh = b$

Dla węzłów równoodległych wielomian L_n jest postaci

$$L_n(x) = L_n(a + th) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-j}{i-j} \quad (14)$$

gdzie $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n, h := (b - a)/n$

Kwadratury Newtona-Cotesa II

Całkując prawą stronę równ. (14) otrzymujemy kwadraturę

$$Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

ze współczynnikami A_i określonymi jako:

$$A_i = h \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-j}{i-j} dt \tag{15}$$

Można sprawdzić, że $A_i = A_{n-i}$

Kwadratury Newtona-Cotesa III

- Przykład 1. Wzór trapezów

Dla $n = 1$ węzłami kwadratury są krańce przedziału $x_0 = a$, $x_1 = b$

Obliczamy współczynniki

$$A_0 = (b - a) \int_0^1 \frac{t-1}{0-1} dt = \frac{b-a}{2}$$

$$A_1 = (b - a) \int_0^1 \frac{t-0}{1-0} dt = \frac{b-a}{2}$$

Kwadratura Newtona-Cotesa dla $n = 1$ jest równa

$$Q(f) = I(L_1) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Otrzymaliśmy tzw. wzór trapezów

Kwadratury Gaussa I

- Pytanie: jaki jest maksymalny rząd kwadratury opartej na ustalonej liczbie węzłów?
- Niech Q - kwadratura oparta na dowolnych węzłach x_0, x_1, \dots, x_k o dowolnych krotnościach $m_i, i = 0, 1, \dots, k, \sum_{i=0}^k m_i = n + 1$:

$$Q(f) = \sum_{j=0}^{m_0-1} A_{j,0} f^{(j)}(x_0) + \sum_{j=0}^{m_1-1} A_{j,1} f^{(j)}(x_1) + \dots + \sum_{j=0}^{m_k-1} A_{j,k} f^{(j)}(x_k) \quad (16)$$

W klasie takich kwadratur szukamy kwadratury o maksymalnym rzędzie przybliżającej funkcjonal liniowy

$$I_p(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx$$

Kwadratury Gaussa II

- Można pokazać, że rząd kwadratury (16) jest co najmniej taki, jak rząd kwadratur interpolacyjnych opartych na $n + 1$ węzłach
- ⇒ Poszukiwanie kwadratury o maksymalnym rzędzie można ograniczyć do kwadratur interpolacyjnych

Kwadratury Gaussa III

- Niech $Q(f) = I_p(H_{n,f})$ - dowolna kwadr. interpol. oparta na węzłach o łącznej krotności $n + 1$. Korzystając z własności wielomianu interpolacyjnego Hermite'a można zapisać równość:

$$f(x) = H_{n,f}(x) + p_{n+1}(x)g(x) \quad (17)$$

gdzie

$$p_{n+1}(x) = (x - x_0)^{m_0}(x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

a więc węzły kwadratury są pierwiastkami wielomianu p_{n+1} .
Całkując równość (17) dostajemy:

$$I_p(f) = Q(H_{n,f}) + R(f)$$

gdzie reszta kwadratury jest równa

$$R(f) = \int_a^b p(x)p_{n+1}(x)g(x)dx$$

Kwadratury Gaussa IV

i może być interpretowana jako iloczyn skalarny (p_{n+1}, g) w przestrzeni $L_p^n[a, b]$.

- Ze wzoru (17) wynika, że jeśli f jest wiel. stopnia m , to g jest też wielomianem, a jego stopień jest równy $m - (n + 1)$
- ⇒ Znalezienie kwadratury o maksymalnym rzędzie, czyli dla wielomianów możliwie wysokiego stopnia, sprowadza się do wyznaczenia wielomianu p_{n+1} ortogonalnego do wielomianów jak najwyższego stopnia. Rozwiązaniem tego zadania jest $n + 1$ -szy wielomian ortogonalny na przedziale $[a, b]$ z wagą p . Jest on prostopadły, tzn. $(p_{n+1}, g) = 0$, do wszystkich wielomianów g stopnia mniejszego od $n + 1$, a stąd $m - (n + 1) < n + 1$, czyli $m \leq 2n + 1$. Biorąc p_{n+1}^2 stopnia $2n + 2$ dostajemy:

$$0 = Q(p_{n+1}^2) \neq I(p_{n+1}^2) > 0$$

Kwadratury Gaussa V

- W ten sposób pokazaliśmy, że kwadraturą postaci (16) o maksymalnym rzędzie, równym $2n + 2$, jest kwadratura interpolacyjna, której węzłami są pierwiastki $n + 1$ -szego wielomianu ortogonalnego na przedziale $[a, b]$ z wagą p . Taka kwadratura nazywana jest *kwadraturą Gaussa*. Można pokazać, że jej węzły są rzeczywiste, jednokrotne i leżą wewnątrz przedziału całkowania $[a, b]$
- Kwadratury Gaussa są więc postaci:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

Współczynniki A_i można wyznaczyć z wzoru (15) dla kwadratur interpolacyjnych. Można dowieść, że współczynniki te są równe:

$$A_i = \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{\|P_n\|^2}{P'_{n+1}(x_i)P_n(x_i)} \quad (18)$$

gdzie a_k jest współczynnikiem przy najwyższej potędze k -tego wielomianu ortogonalnego, $P_k = a_k x^k + \dots$

Kwadratury Gaussa VI

Można też pokazać, że współczynniki A_i są równe

$$A_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^n (\tilde{P}_k(x_i))^2} \quad (19)$$

gdzie \tilde{P}_k są wielomianami ortonormalnymi

Wynika stąd, że współczynniki kwadratur Gaussa są dodatnie

- Twierdzenie. Można pokazać, że dla dowolnego przedziału $[a, b]$ i funkcji wagowej p ciąg kwadratur Gaussa jest zbieżny do całki

$$\int_a^b f(x)p(x)dx$$

dla wszystkich funkcji f ciągłych na $[a, b]$.

Kwadratury Gaussa. Reszta

Reszta kwadratury Gaussa $R(f) = I_p(f) - Q(f)$

Można dowieść, że jeśli $f \in C_{[a,b]}^{2n+2}$, to reszta kw. Gaussa jest równa

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b p(x) p_{n+1}^2(x) dx, \quad \xi \in (a, b)$$

Kwadratury Gaussa. Wykorzystanie I

- Aby móc stosować kw. Gaussa dla przybliżania całek $\int_a^b p(x)f(x)dx$ musimy znać pierwiastki odpowiednich wielomianów ortogonalnych
- Koszt wyznaczenia samych węzłów (pierwiastków odpowiedniego wiel. ortogonalnego) może być na tyle duży, że stosowanie kwadratur Gaussa staje się nieopłacalne
- Przedział całkowania nie ma znaczenia \Rightarrow można zastosować zamianę zmiennej w całości
 - Pytanie: Jak kwadraturę określoną na przedziale $[a, b]$ zastosować do obliczenia kwadratury zdefiniowanej na przedziale $[c, d]$

Kwadratury Gaussa. Wykorzystanie II

- Stosujemy liniową zamianę zmiennej:

$$x = \alpha t + \beta$$

stąd

$$t = \frac{1}{\alpha}(x - \beta), \quad dx = \alpha dt$$

Jeśli

$$\alpha = \frac{b - a}{d - c}, \quad \beta = \frac{ad - bc}{d - c}$$

to odcinek $a \leq x \leq b$ jest przeprowadzany na odcinek $c \leq t \leq d$.
Wynika stąd równość

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \alpha \int_c^d v(t)g(t)dt$$

gdzie

$$g(t) = f(\alpha t + \beta)$$

$$v(t) = p(\alpha t + \beta)$$

Kwadratury Gaussa. Wykorzystanie III

- Własność liniowej zmiany zmiennej w całce można wykorzystać do obliczania tych samych kwadratur dla różnych przedziałów całkowania:

- Niech kwadratura $Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ spełnia równanie

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = Q(f) + R(f)$$

- Kwadraturę Q przekształcamy w kwadraturę $\tilde{Q}(g) = \sum_{i=0}^n B_i g(t_i)$, która spełnia zależność

$$\int_c^d v(t)g(t)dt = \tilde{Q}(g) + \tilde{R}(g)$$

gdzie

$$t_i = \frac{1}{\alpha}(x_i - \beta), \quad B_i = \frac{1}{\alpha}A_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

oraz

$$\tilde{R}(g) = \frac{1}{\alpha}R(f)$$

Kwadratury Gaussa. Wykorzystanie IV

- W przypadku symetrycznej funkcji wagowej, tzn. spełniającej dla $x \in [0, \frac{b-a}{2}]$ równanie

$$p\left(\frac{a+b}{2} + x\right) = p\left(\frac{a+b}{2} - x\right)$$

węzły kwadratury Gaussa są położone symetrycznie względem środka przedziału całkowania $[a, b]$, a współczynniki A_i i A_{n-i} są sobie równe.

Kwadratury Gaussa. Przykład I

Przykład. Wykorzystanie wielomianów Legendre'a na przedziale $[-1, 1]$ do obliczenia całki $\int_2^3 g(t)dt$ z funkcją wagową $v(t) = 1$, wykorzystując kwadraturę Gaussa opartą na czterech węzłach

- Uwaga: wielomiany Legendre'a są ortogonalne z wagą 1 na tym przedziale \rightarrow konstruujemy pomocniczą kwadraturę przybliżającą całkę $\int_{-1}^1 f(x)dx$, a następnie dokonujemy liniowej zamiany zmiennej
- Korzystamy z zależności rekurencyjnej dla wielomianów Legendre'a P_k i obliczamy:

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

- Węzły kwadratury, czyli pierwiastki P_4 , są równe:

$$-x_0 = x_3 = \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} \approx 0.86113$$

$$-x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} \approx 0.33998$$

Kwadratury Gaussa. Przykład II

- Z równania (18) można wyznaczyć współczynniki kwadratury:

$$A_i = \frac{\frac{35}{8}}{\frac{5}{2} \frac{P_4'(x_i) P_3(x_i)}{7}}$$

skąd otrzymujemy:

$$A_0 = A_3 = \frac{49}{6(18+\sqrt{30})} \approx 0.34785$$

$$A_1 = A_2 = \frac{49}{6(18-\sqrt{30})} \approx 0.65214$$

- Skonstruowana pomocnicza kwadratura Q Gaussa-Legendre'a spełnia zależność

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = Q(f) + R(f) = \sum_{i=0}^3 A_i f(x_i) + R(f)$$

Kwadratury Gaussa. Przykład III

- Podstawiając $t = \frac{1}{2}(x + 5)$ i przyjmując $f(x) = g(\frac{1}{2}(x + 5))$ otrzymujemy poszukiwaną kwadraturę \tilde{Q} , dla której zachodzi równość:

$$\int_2^3 g(t)dt = \tilde{Q}(g) + \tilde{R}(g) = \sum_{i=0}^3 B_i g(t_i) + \tilde{R}(g)$$

gdzie:

$$t_i = \frac{1}{2}(x + 5), \quad B_i = \frac{1}{2}A_i, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

oraz $\tilde{R}(g) = \frac{1}{2}R(f)$

Elementy statystyki - przypomnienie

- Rozkład prawdopodobieństwa
- Dystrybuanta
- Funkcja gęstości prawdopodobieństwa
- Wartość oczekiwana
- Wariancja (odchylenie standardowe)

Elementy statystyki - cd I

- *Dystrybuanta* F . Niech P będzie rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej x . Funkcja $F : R \rightarrow R$ jest dystrybuantą rozkładu P gdy

$$F(x) = P \{(-\infty, x]\}$$

- *Funkcja gęstości prawdopodobieństwa* f (gęstość zmiennej losowej) to funkcja o następujących własnościach:

$$\forall_{x \in [a, b]} f(x) \geq 0 \quad \int_a^b f(x) dx = 1$$

- Jeżeli dystrybuanta F ma gęstość, to

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f'(x) dx$$

Elementy statystyki - cd II

- Funkcji gęstości prawdopodobieństwa f używamy do określenia *prawdopodobieństwa* zdarzenia, że zmienna x przyjmie wartość pomiędzy x a $x + dx$:

$$P\{x \leq x_i \leq x + dx\} = f(x)dx$$

- Mając funkcję gęstości prawdopodobieństwa f możemy określić związek z *dystrybuantą* rozkładu F :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

- I określić *prawdopodobieństwo*

$$P\{x_1 \leq x \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Elementy statystyki - cd III

- Wartość oczekiwana zmiennej losowej x

$$\langle x \rangle = E(x) = \mu(x) = \int_a^b xf(x)dx$$

- Wariancja zmiennej losowej x

$$\sigma^2(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

- Odchylenie standardowe

$$\sigma(x) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

Elementy statystyki - cd IV

- Jeżeli ciąg liczb $\{x_i\} = \{x_i : i = 1, \dots, N\}$ stanowią zmienne losowe o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$, to estymatorem wartości oczekiwanej $\mu(z)$ zmiennej losowej $z(x_i)$ jest średnia z próbki

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z(x_i)$$

- Wariancja wtedy jest równa

$$\begin{aligned} \sigma^2(z) &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (z_i - \bar{z})^2 = \\ &= \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N z_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N z_i \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Elementy statystyki - cd V

- Miarą rozrzutu zmiennych losowych z_i wokół wartości średniej jest odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2(z)}$$

- Zauważmy, że \bar{z} jest również zmienną losową powstałą ze zmiennych z_i , przy czym każda z nich ma taką samą wariancję. Stąd odchylenie standardowe średniej

$$\sigma^2(\bar{z}) = \sigma^2\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2(z) = \frac{1}{N} \sigma^2(z)$$

I do oszacowania tego odchylenia można użyć $\sigma(z)$

$$\sigma(\bar{z}) = \frac{\sigma(z)}{\sqrt{N}}$$

Metoda Monte Carlo I

- Zadanie: wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej $z = z(\mathbf{x})$, będącą funkcją wektora zmiennych losowych $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]$
- Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej z opisany jest funkcją gęstości rozkładu $g(z)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z(\mathbf{x})) dz = 1$$

- Natomiast rozkład prawdopodobieństwa wektora \mathbf{x} opisany jest funkcją gęstości $f(\mathbf{x})$

$$\int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$$

- Stąd wartość oczekiwana $\langle z \rangle$ jest równa

$$\langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} zg(z) dz = \int_V z(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Metoda Monte Carlo II

- Metoda Monte Carlo szacowania wartości całki

$$I = \int_V z(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z(\mathbf{x})$$

- Błąd powyższego oszacowania

$$\sigma(I) = \sqrt{\int_V (z - \langle z \rangle)^2 f(\mathbf{x})d\mathbf{x}} \cong \frac{\sigma(z)}{\sqrt{N}}$$

Metoda Monte Carlo III

- Najczęściej obszarem całkowania jest podzbiór przestrzeni R^M . W takim przypadku całkę można zapisać z wykorzystaniem funkcji charakterystycznej zbioru $\mathbf{1}_V$, $V \subset \Omega$

$$I = \int_V z(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{1}_V(\mathbf{x})z(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

gdzie

$$\mathbf{1}_V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mathbf{x} \in V \\ 0 & \text{jeżeli } \mathbf{x} \notin V \end{cases}$$

- Obliczanie całki metodą Monte Carlo

$$I = \int_V z(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{1}_V(\mathbf{x})z(\mathbf{x})d\mathbf{x} \cong \frac{\Omega}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_V(\mathbf{x}_i)z(\mathbf{x}_i)$$

- Dla obliczeń zakładamy, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest stała w Ω
- Efektywność metody zależy wielkości obszaru Ω w stosunku do V

Metoda Monte Carlo. Przykład I

Zadanie: wyznaczyć pole powierzchni obszaru S

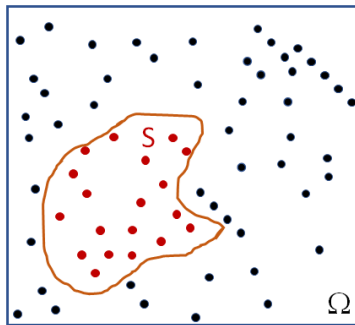
n - liczba punktów wewnątrz obszaru S

N - liczba wszystkich punktów w obszarze Ω

$$S = \int_V 1 d^2\mathbf{x} = \int_{\Omega} 1_V d^2\mathbf{x}$$

$$S = \frac{\Omega}{N} \sum_{i=1}^N 1_V = \Omega \frac{n}{N}$$

$n = \bullet$
 $N = \bullet \bullet$



Metoda Monte Carlo. Przykład I

Zadanie: obliczyć wartość całki

$$I = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_4 \int_0^1 dx_5 g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

gdzie $g = \sqrt{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}$

- Obliczamy całkę metodą trapezów

$$\int_0^1 f(y) dy = h \left[\frac{f(y_0) + f(y_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(y_i) \right] \quad y_0 = 0, y_n = 1$$

$$I_{trapez} = h^5 \sum_{i=0}^n w_i \sum_{j=0}^n w_j \sum_{k=0}^n w_k \sum_{l=0}^n w_l \sum_{m=0}^n w_m g(x_i, x_j, x_k, x_l, x_m)$$

$$h = \frac{1}{n} \quad w_{i,j,k,l,m} = \begin{cases} \frac{1}{2} & i, j, k, l, m = 0, n \\ 1 & i, j, k, l, m = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Metoda Monte Carlo. Przykład II

- Obliczamy całkę metodą Monte Carlo

$$I_{MC} = \frac{\Omega}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{X}) \quad \Omega = \Delta^5, \quad \Delta = 1$$

gdzie $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$ jest wektorem zmiennych losowych

Metody numeryczne IT/IO, WIMiP

Danuta Szeliga

AGH Kraków

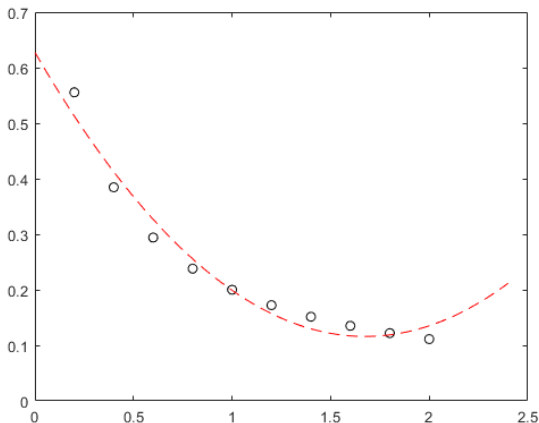
Spis treści

- 1 Spis treści
- 2 Aproksymacja
- 3 Przestrzenie unormowane
- 4 Sformułowanie zadania
- 5 Przestrzeń unitarna. Algorytmy ortogonalizacyjne
- 6 Aproksymacja w przestrzeniach unitarnych
 - Aproksymacja średniokwadratowa
- 7 Aproksymacja jednostajna
- 8 Aproksymacja Padego

Aproksymacja I

Aproksymacja, inaczej *przybliżanie funkcji*

Intuicyjnie:



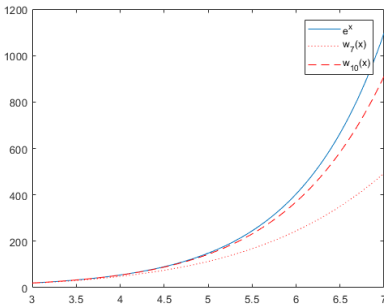
Aproxymacja II

- Przykład

Aproxymacja danej funkcji inną, "prostsza" funkcją, np. numeryczne obliczanie wartości funkcji standardowych, takich jak e^x , $\cos x$. Rozwiązaniem może być przybliżenie funkcji sumami częściowymi ich rozwinięć w szereg Maclaurina, czyli aproxymacja e^x wielomianem $w_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$, przy czym żąda się, aby była spełniona nierówność

$$\max_{x \in [a, b]} |e^x - w_n(x)| < \varepsilon$$

gdzie $[a, b]$ to przedział, w którym przybliżamy e^x , ε to zadana dokładność.



Aproksymacja III

- Przykład

Rozwiązanie zagadnień fizycznych. Jeśli znamy charakter funkcji f opisującej problem fizyczny, to możemy wybrać klasę funkcji U , którymi będziemy przybliżać f . Jeśli dodatkowo znamy wartości $f(x_i)$ w skończonej liczbie punktów x_i , $i = 1, \dots, N$, np. z pomiaru, to w takim przypadku często poszukuje się takiego przybliżenia $h^* \in U$, dla którego wyrażenie $\sum_{i=1}^n (f(x_i) - h^*(x_i))^2$ przyjmuje możliwie najmniejszą wartość.

Aproxymacja IV

Z przytoczonych przykładów wynika, że zadanie aproxymacji może być różnie formułowane:

- W klasycznym przypadku dla danej funkcji f spośród ustalonej klasy funkcji poszukujemy funkcji g , która w określonym sensie przybliża najlepiej funkcję f
albo
- Wyznaczenie, możliwie niskim kosztem, przybliżenia g funkcji f z zadaną dokładnością
albo
- Zadanie aproxymacji całej klasy funkcji (zamiast tylko jednej funkcji) funkcjami innej klasy.

Przestrzenie unormowane I

Przestrzeń liniowa unormowana. Przestrzeń liniową V nazywamy unormowaną, jeśli określona jest w niej funkcja zwana *normą*, która każdemu elementowi $f \in V$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $\|f\|$ taką, że

(a) $\|f\| \geq 0; \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

(b) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

(c) $\|f + g\| \geq \|f\| + \|g\|$

dla dowolnych elementów $f, g \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$

Przykłady przestrzeni liniowych unormowanych

- $C_{[a,b]}$ - przestrzeń funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ z normą jednostajną $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Jest to przestrzeń nieskończenie wymiarowa.

Podprzestrznią nieskończenie wymiarową tej przestrzeni jest np. przestrzeń wielomianów. Wielomiany stopnia nie wyższego niż n tworzą przestrzeń $n + 1$ wymiarową. Jedną z baz tej podprzestrzeni, oznaczaną jako W_n , jest układ wielomianów postaci: $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Przestrzenie unormowane III

- Przestrznią liniową unormowaną wymiaru N jest przestrzeń $l_{p,N}^2$, której elementami są układy N liczb rzeczywistych $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$, a norma jest definiowana równością $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^N f_i^2 p_i \right)^{1/2}$, gdzie $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ jest danym układem liczb dodatnich. W dalszych rozważaniach elementy tej przestrzeni będziemy rozpatrywać jako układy N wartości funkcji w ustalonych punktach x_i , tzn. $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Zadanie aproksymacji I

W rozważaniach ograniczymy się do omówienia klasycznego zadania aproksymacji liniowej.

Definicja zadania

Dla ustalonego elementu $f \in V$, gdzie V jest przestrzenią liniową unormowaną, szukamy elementu $h^* \in U$, gdzie U jest podprzestrzenią liniową skończenie wymiarową, takiego, że

$$\|f - h^*\| \leq \|f - h\| \quad \forall h \in U$$

Zadanie aproksymacji II

Błąd aproksymacji

Błędem aproksymacji elementu f względem podprzestrzeni U nazywamy wielkość $\varepsilon_U(f)$ równą

$$\varepsilon_U(f) := \inf_{h \in U} \|f - h\|$$

a element h^* , dla którego zachodzi równość $\|f - h^*\| = \varepsilon_U(f)$ *elementem optymalnym*.

Można pokazać, że jeśli V jest przestrzenią liniową unormowaną, a U jej podprzestrzenią liniową skończenie wymiarową, to dla dowolnego elementu $f \in V$ istnieje element optymalny względem U .

Przestrzeń unitarna

W przestrzeniach unitarnych zadanie aproksymacyjne ma proste rozwiązanie.

Przestrzeń unitarna

Przestrzeń liniową V nazywamy *unitarną*, jeśli jest w niej określona funkcja zwana *iloczynem skalarnym*, która parze elementów $f, g \in V$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą (f, g) spełniającą następujące warunki:

- (a) $(f, f) \geq 0$; $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$
- (b) $(f, g) = (g, f)$
- (c) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$
 $\forall f, g, h \in V$ i liczb rzeczywistych α, β .

Przestrzenie unitarne. Przykłady

- Przestrzeń $L_p^2[a, b]$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym jako:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

- Przestrzeń $l_p^2[a, b]$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym jako:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^N f(x_i)g(x_i)p(x_i)$$

- Każda przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną, jeśli za normę przyjmiemy $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Ortogonalność

Układ ortogonalny

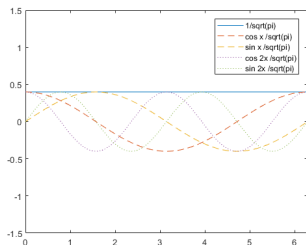
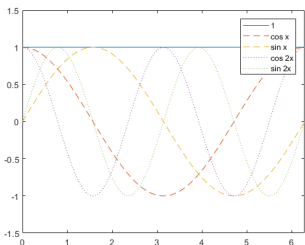
Jeśli $(f, g) = 0$, to mówimy, że dwa elementy są wzajemnie *prostopadłe* (ortogonalne). Skończony lub nieskończony zbiór niezerowych elementów $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ przestrzeni unitarnej nazywamy *układem ortogonalnym*, jeśli dowolne różne elementy są wzajemnie ortogonalne: $(f_k, f_l) = 0$ dla $k \neq l$.

Jeżeli dodatkowo $(f_k, f_k) = 1$, to układ nazywamy *ortonormalnym*. Przez ortogonalność elementu f do podprzestrzeni U rozumiemy jego ortogonalność do każdego elementu tej podprzestrzeni. W przestrzeni unitarnej zachodzi *twierdzenie Pitagorasa*.

Ortogonalność. Przykład

Przykład układu ortogonalnego: zbiór funkcji $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$, w przestrzeni $L^2_{[0,2\pi]}$ z funkcją wagową $p(x) = 1$.

Normując te funkcje, dostajemy układ ortonormalny $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$



Metoda ortogonalizacji I

Dla dowolnego układu f_1, f_2, \dots, f_n liniowo niezależnych elementów przestrzeni unitarnej istnieje układ ortogonalny g_1, g_2, \dots, g_n taki, że każdy z elementów g_i jest kombinacją liniową f_1, f_2, \dots, f_n , czyli należy do przestrzeni rozpiętej na tych wektorach.

Układ ortogonalny konstruowany jest *metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta* (moG-S) i definiuje elementy g_i jako:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= f_1 \\
 g_i &= f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(f_i, g_j)}{(g_j, g_j)} g_j \quad i = 2, 3, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1}$$

Metoda ortogonalizacji I

Dla dowolnego układu f_1, f_2, \dots, f_n liniowo niezależnych elementów przestrzeni unitarnej istnieje układ ortogonalny g_1, g_2, \dots, g_n taki, że każdy z elementów g_i jest kombinacją liniową f_1, f_2, \dots, f_n , czyli należy do przestrzeni rozpiętej na tych wektorach.

Układ ortogonalny konstruowany jest *metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta* (moG-S) i definiuje elementy g_i jako:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= f_1 \\
 g_i &= f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(f_i, g_j)}{(g_j, g_j)} g_j \quad i = 2, 3, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Można zauważyć, że dla każdego $i \geq 1$ przestrzenie rozpięte na układach wektorów g_1, g_2, \dots, g_i i f_1, f_2, \dots, f_i są identyczne, ale układ g_1, g_2, \dots, g_i jest bazą ortogonalną tej przestrzeni, a układ f_1, f_2, \dots, f_i taką bazą być nie musi.

Metoda ortogonalizacji II

- Zasadniczy koszt moG-S to koszt obliczenia $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ iloczynów skalarnych
- moG-S dla dowolnej przestrzeni unitarnej może dawać duży błąd, a sama analiza może być problematyczna. Dla otrzymania wyników o praktycznym zastosowaniu, konieczna jest znajomość błędu wytworzonego przy obliczaniu iloczynu skalarnego w konkretnej rozpatrywanej przestrzeni

Metoda ortogonalizacji III

W wielu przypadkach układ $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_n$ otrzymany moG-S, może być daleki od ortogonalnego. Można algorytm poprawić poprzez:

- wykonanie *reortogonalizacji*, tzn. ponowne wykonanie algorytm 1, podstawiając za elementy f_i obliczone przybliżenia \tilde{g}_i albo
- zastosowanie *zmodyfikowanego algorytmu Grama-Schmidta* (zmoG-S):

```

for i ← 1 step 1 to n do
  gi ← fi;
  for j ← i+1 step 1 to n do
    fj ← fj -  $\frac{(g_i, f_j)}{(g_i, g_i)} g_i$ 
  end for
end for
    
```

Koszt zmoG-S jest taki sam jak moG-S.

W przypadku przestrzeni unitarnych ZA rozwiązuje się najczęściej w przestrzeniach $L_p^2[a, b]$ i $l_{p,N}^2$, a funkcjami przybliżającymi są przeważnie wielomiany. Stąd szczególnie ważne są układy ortogonalne wielomianów, które znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach metod numerycznych.

Ciągi wielomianów ortogonalnych I

Ciąg P_0, P_1, \dots, P_n , gdzie $k = 0, 1, \dots, n$ jest wielomianem st. dokładnie k , nazywamy:

- ciągiem wielomianów ortogonalnych na przedziale $[a, b]$ z wagą p , jeśli tworzą one układ ortogonalny w przestrzeni $L_p^2[a, b]$, tzn.

$$(P_k, P_l) := \int_a^b P_k(x)P_l(x)p(x)dx = 0 \quad k \neq l, k, l = 0, 1, \dots (n < \infty)$$

- ciągiem wielomianów ortogonalnych na zbiorze dyskretnym x_1, x_2, \dots, x_N z wagą p , jeśli tworzą one układ ortogonalny w przestrzeni $l_{p,N}^2$, tzn.

$$(P_k, P_l) := \sum_{i=1}^N P_k(x_i)P_l(x_i)p(x_i) = 0 \quad k \neq l, k, l = 0, 1, \dots n \quad (n \leq N-1)$$

gdzie $p(x_i), i = 1, 2, \dots, N$ są liczbami dodatnimi.

Ciągi wielomianów ortogonalnych II

Jak utworzyć ciąg wielomianów ortogonalnych?

Do konstrukcji wielomianów ortogonalnych należy zortogonalizować ciąg $1, x, \dots, x^n$ np. metodą G-S.

Własności wielomianów ortogonalnych I

Można pokazać, że

- w przestrzeni $L^2_p[a, b]$ lub $l^2_{p,N}$ ciąg wielomianów ortogonalnych jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do mnożników liczbowych.
- spełniona jest tzw. *reguła trójczłonowa*. Wielomiany ortogonalne $P_k (k = 0, 1, \dots, n)$ spełniają zależność rekurencyjną:

$$P_k(x) = (\alpha_k x + \beta_k)P_{k-1}(x) + \gamma_k P_{k-2}(x) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$P_{-1}(x) := 0, \quad P_0(x) := a_0$$

gdzie $\alpha_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \neq 0$, $\beta_k = -\frac{\alpha_k(xP_{k-1}, P_{k-1})}{(P_{k-1}, P_{k-1})}$,

$\gamma_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})}{(P_{k-2}, P_{k-2})} \neq 0$, $k = 2, 3, \dots, n$, a_k oznacza

współczynnik wielomianu P_k przy x^k , $P_k(x) = a_k x^k + \dots$

Skoro wielomiany są wyznaczane z dokładnością do mnożników

liczbowych, to wartości a_k można ustalić dowolnie, np. wziąć

$a_k = 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, wtedy dostajemy $\alpha_k = 1$ i powyższe wzory

mają postać:

$$\beta_k = -\frac{(xP_{k-1}, P_{k-1})}{(P_{k-1}, P_{k-1})} \tag{2}$$

Własności wielomianów ortogonalnych II

oraz

$$\gamma_k = -\frac{(P_{k-1}, P_{k-1})}{(P_{k-2}, P_{k-2})} \quad (3)$$

Koszt algorytmu jest równy kosztowi obliczenia dwóch iloczynów skalarnych (xP_{k-1}, P_{k-1}) i (P_{k-1}, P_{k-1}) (iloczyn (P_{k-2}, P_{k-2}) musiał być wyznaczony wcześniej dla P_{k-2}). Znalazienie n wielomianów ortogonalnych z reguły trójczłonowej wymaga obliczenia jedynie $2n - 2$ iloczynów skalarnych w porównaniu z $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ il. sk. w moG-S.

Można pokazać, że pierwiastki wielomianów ortogonalnych w przestrzeni $L_p^2[a, b]$ są rzeczywiste, jednokrotne i leżą wewnątrz przedziału $[a, b]$.

Przykłady układów ortogonalnych I

- Wielomiany Legendre'a definiowane wzorami

$$P_0(x) := 1, \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k \quad k = 1, 2, \dots$$

są wielomianami ortog. na przedziale $[-1, 1]$ z f. wagową $p(x) = 1$.
Spełniają zależność rekurencyjną postaci:

$$P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$P_0(x) = 1$$

Można pokazać, że

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^k \binom{k}{i} \binom{2k-2i}{k} x^{k-2i}$$

oraz

$$\|P_k\| = \int_{-1}^1 (P_k(x))^2 dx = \frac{2}{2k+1}$$

Przykłady układów ortogonalnych II

- Wielomiany Hermite'a dane wzorem

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$$

są ciągiem wiel. ortog. w przestrzeni $L_p^2(-\infty, +\infty)$ z funkcją wagową $p(x) = e^{-x^2}$.

Postać jawna:

$$H_k(x) = k! \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^i \frac{(2x)^{k-2i}}{i!(k-2i)!}$$

Reguła trójczłonowa ma postać:

$$H_k(x) = 2xH_{k-1}(x) - (2k-2)H_{k-2}(x) \quad k = 2, 3, \dots$$

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

Przykłady układów ortogonalnych III

Norma jest równa:

$$\|H_k\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (H_k(x))^2 dx = \sqrt{\pi} 2^k k!$$

- W przestrzeni $L^2_{p,N}$, przypadek, gdy f. wagowe $p(x_i) = 1$, a punkty x_i definiujące il. skalarny $(f, g) = \sum_{i=1}^N f(x_i)g(x_i)p(x_i)$ są punktami równoodległymi. Bez straty ogólności można założyć, że punkty leżą w przedziale $[-1, 1]$, czyli że $x_i = \frac{2(i-1)}{N-1} - 1$. Ciągami wiel. ortonormalnych na zbiorze dyskretnym x_1, x_2, \dots, x_N są wielomiany Grama G_0, G_1, \dots, G_{N-1}

$$(G_k, G_l) := \sum_{i=1}^N G_k(x_i)G_l(x_i) = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases} \quad k, l = 0, 1, \dots, N-1$$

Przykłady układów ortogonalnych IV

Spełniają one zależność rekurencyjną:

$$G_k(x) = \alpha_k x G_{k-1}(x) + \gamma_k G_{k-2}(x) \quad k = 1, 2, \dots, N - 2$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= \frac{N-1}{k} \sqrt{\frac{4k^2-1}{N^2-k^2}} & \gamma_k &= \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} \\
 G_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{N}} & G_{-1}(x) &= 0
 \end{aligned}$$

Dla k znacznie mniejszego od \sqrt{N} wielomiany Grama G_k są bliskie wielomianom Legendre'a P_k , a dla k istotnie większych od \sqrt{N} wielomiany G_k mają normę jednostajną w przedziale $[-1, 1]$, a ich wartości silnie oscylują między punktami x_i .

Przykłady układów ortogonalnych V

- Wielomiany Czebyszewa. Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju definiowane są jako:

$$T_k(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k}{2} \quad k = 0, 1, \dots$$

Dla $|x| \leq 1$ wielomiany Czebyszewa są postaci:

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad k = 2, 3, \dots$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

Dla $|x| > 1$ wielomiany Czebyszewa mają postać:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

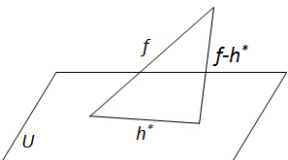
Przykłady układów ortogonalnych VI

Wielomiany Czebyszewa stopnia parzystego są funkcjami parzystymi, a stopnia nieparzystego funkcjami nieparzystymi, tzn.
 $T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$.

Aproxymacja w przestrzeniach unitarnych

Przypadek ogólny

- W przestrzeniach unitarnych, gdzie normę definiujemy przez iloczyn skalarny $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$, można pokazać, że jeśli V jest przestrzenią unitarną, U jej podprzestrzenią, a f dowolnym elementem z V , to element $h^* \in U$ jest optymalnym dla f względem podprzestrzeni U wtw, gdy $f - h^*$ jest ortogonalny do U
- Interpretacja geometryczna:



Błąd aproksymacji

Błąd aproksymacji w przestrzeni unitarnej elementu f względem podprzestrzeni U jest równy:

$$\varepsilon_U := \|f - h^*\| = (\|f\|^2 - \|h^*\|^2)^{1/2}$$

co wynika z faktu, że jeśli h^* jest optymalnym elementem dla f względem U , to $f - h^*$ jest ortogonalny do U , tzn., że $(f - h^*, h^*) = 0$, i wiedząc, że jeśli $(f, g) = 0$ to $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$, otrzymujemy:

$$\|f\|^2 = \|f - h^* + h^*\|^2 = \|f - h^*\|^2 + \|h^*\|^2$$

Wyznaczenie elementu optymalnego h^* III

a błąd aproksymacji:

$$\varepsilon_U = \|f - h^*\| = (\|f\|^2 - \sum_{j=1}^n (f, f_j)^2)^{1/2} \quad (6)$$

Konstrukcja h^* z równania 5 wymaga obliczenia jedynie n iloczynów skalarnych

Pytanie: czy lepiej rozwiązać układ normalny (4) czy zortonormalizować bazę podprzestrzeni U metodą G-S i wyznaczyć h^* ze wzoru 5? Koszt obu metod jest porównywalny, wybór zależy od własności numerycznych obu metod.

Przybliżenie f z zadany**m** błędem III

- Ze wzoru (8) wynika, że zadanie ma rozwiązanie dla dowolnego $\varepsilon > 0$, tzn., że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{U_n}(f) = 0 \Leftrightarrow \text{spełniona jest równość } \|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f, g_j)^2,$$

zwana *równością Parsewala*

Wyznaczanie h_n^* I

- Jeśli znamy ortonormalną bazę g_1, g_2, g_3, \dots przestrzeni V , to rozwiązanie i błąd aproksymacji można wyliczyć rekurencyjnie z zależności (7) i (8):

$$\begin{aligned}
 h_n^* &= h_{n-1}^* + (f, g_n)g_n \\
 \varepsilon_{U_n}^2 &= \varepsilon_{U_{n-1}}^2 - (f, g_n)^2 \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

i $h_0^* := 0, \varepsilon_{U_0} := \|f\|$.

- Jeżeli znany jest tylko układ liniowo niezależny f_1, f_2, f_3, \dots , to wyznaczamy kolejno elementy g_n układu ortonormalnego mG-S i elementy optymalne h_n^* :

Przykład II

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \tag{12}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \quad k = 1, 2, \dots$$

Dla dowolnej funkcji $L^2_p[0, 2\pi]$, $p(x) = 1$, szereg (11) jest zbieżny do f . Jego sumami częściowymi (wielomianami trygonometrycznymi) można w przekstrzeni $L^2_p[0, 2\pi]$, $p(x) = 1$, aproxymować każdą funkcję z dowolną dokładnością.

Przykład III

Dla n nieparzystych elementami optymalnymi dla f względem U_n są zgodne ze wzorem (7) wielomiany trygonometryczne

$$t_m^*(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

o współczynnikach określonych (12).

Aproxymacja średniokwadratowa I

Aproxymacja średniokwadratowa wielomianami

- Aproxymacja funkcji w przestrzeni $L^2_p[a, b]$ nazywana jest *aproxymacją średniokwadratową*
- Aproxymacja funkcji w przestrzeni $l^2_{p,N}$ nazywana jest *aproxymacją średniokwadratową dyskretną*

Założenie: przybliżamy funkcję wielomianami

Element optymalny dla funkcji f względem podprzestrzeni W_n wielomianów stopnia nie wyższego niż n , czyli wielomian w_n^* , dla którego zachodzi równość:

$$\|f - w_n^*\| = \inf_{w \in W_n} \|f - w\|$$

gdzie

$$\|f - w\| := \begin{cases} \left(\int_a^b (f(x) - w(x))^2 p(x) dx \right)^{1/2} & \text{dla } L^2_p[a, b] \\ \sum_{i=1}^N (f(x_i) - w(x_i))^2 p(x_i) & \text{dla } l^2_{p,N} \end{cases}$$

Aproksymacja średniokwadratowa II

nazywamy *n -tym wielomianem optymalnym* w sensie aproksymacji średniokwadratowej z funkcją wagową p odpowiednio na przedziale $[a, b]$ lub na zbiorze dyskretnym x_1, x_2, \dots, x_N .

- W przypadku aproksymacji średniokwadratowej dyskretnej stopień n wielomianu aproksymującego może być równy co najwyżej $N - 1$. Dla $n < N - 1$ zadanie nie ma jednoznacznego rozwiązania, dla $n = N - 1$ rozwiązaniem jest wielomian interpolacyjny Lagrange'a
- Dla $n \geq N - 1$ błąd aproksymacji jest równy 0
- Dla wyznaczenia n -tego wielomianu optymalnego można stosować metody dla ogólnego przypadku aproksymacji w przestrzeni unitarnej

Przykłady I

Dla funkcji f szukamy n -tego wielomianu aproksymującego w sensie aproks. średniokw. z wagą $p(x) = 1$ na przedziale $[0, 1]$.

- Sposób 1. Bazą podprzestrzeni W_n niech będą wielomiany $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Układ równań normalnych ma postać:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0(1, 1) + \alpha_1(x, 1) + \dots + \alpha_n(x^n, 1) &= (f, 1) & (13) \\
 \alpha_0(1, x) + \alpha_1(x, x) + \dots + \alpha_n(x^n, x) &= (f, x) \\
 \dots & \\
 \alpha_0(1, x^n) + \alpha_1(x, x^n) + \dots + \alpha_n(x^n, x^n) &= (f, x^n)
 \end{aligned}$$

gdzie wyraz macierzy a_{ij} jest równy:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} dx = \frac{1}{i+j-1}$$

Przykłady - cd I

Dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ szukamy drugiego wielomianu optymalnego w sensie aproks. średniokw. z wagą $p(x) = x$ na przedziale $[0, 1]$, tzn. dla $f(x) = \sqrt{x} \in L_p^2[0, 1]$, $p(x) = x$, szukamy elementu optymalnego względem podprzestrzeni W_2 .

Rozwiązania.

1. Baza dla W_2 : wielomiany $1, x, x^2$.

Obliczamy elementy a_{ij} macierzy układu równań normalnych:

$$a_{ij} = (x^{i-1}, x^{j-1}) = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} x dx = \frac{1}{i+j}$$

Analogicznie obliczamy składowe prawej strony (x^{i-1}, \sqrt{x})

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 &= \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{5}\alpha_3 &= \frac{2}{7} \\ \frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{5}\alpha_2 + \frac{1}{6}\alpha_3 &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Przykłady - cd II

Rozwiązaniem jest $\alpha_1 = \frac{8}{35}$, $\alpha_2 = \frac{8}{7}$, $\alpha_3 = -\frac{8}{21}$. Drugi wielomian optymalny dla $f(x) = \sqrt{x}$ jest równy:

$$w_2^*(x) = \frac{8}{35} + \frac{8}{7}x - \frac{8}{21}x^2$$

II. moG-S ortogonalizujemy bazę $1, x, x^2$:

$$g_1 = 1$$

$$g_2 = x - \frac{(x, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 = x - \frac{2}{3}$$

$$g_3 = x^2 - \frac{(x^2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1 - \frac{(x^2, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2 = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}$$

Następnie tę bazę normalizujemy, tzn. $g_k := \frac{g_k}{\|g_k\|}$,

$$\|g_k\| := \sqrt{(g_k, g_k)}:$$

$$g_1 = \sqrt{2}$$

$$g_2 = 6x - 4$$

$$g_3 = \sqrt{6}(10x^2 - 12x + 3)$$

Przykłady - cd III

Dla wyznaczenia w_2^* korzystamy z równania (14) i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} w_2^*(x) &= (\sqrt{x}, g_1)g_1(x) + (\sqrt{x}, g_2)g_2(x) + (\sqrt{x}, g_3)g_3(x) \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{2}g_1(x) + \frac{4}{35}g_2(x) - \frac{2}{105}\sqrt{\frac{2}{3}}g_3(x) \end{aligned}$$

III. Z reguły trójczłonowej

$$\begin{aligned} P_{-1} &= 0, & P_0 &= 1 \\ P_k &= (x + \beta_k)P_{k-1} + \gamma_k P_{k-2} & k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

gdzie współczynniki β_k i γ_k dane są równaniami (2) i (3), wyznaczamy wielomiany $P_0 = 1$, P_1 i P_2 ortogonalne w $L_p^2[0, 1]$ z wagą $p(x) = x$.

Obliczamy kolejno:

dla $k = 1$: $\beta_1 = -\frac{(xP_0, P_0)}{(P_0, P_0)} = -\frac{2}{3}$, stąd $P_1 = (x - \frac{2}{3}) P_0$

dla $k = 2$: $\beta_2 = -\frac{(xP_1, P_1)}{(P_1, P_1)} = -\frac{8}{15}$ i $\gamma_2 = \frac{(P_1, P_0)}{(P_0, P_0)} = -\frac{1}{18}$, stąd

$$P_2 = (x - \frac{8}{15}) P_1 - \frac{1}{18} P_0$$

Przykłady - cd IV

Dalej postępowanie jest takie samo jak w rozwiązaniu nr II: normalizujemy P_0, P_1, P_2 , tzn. $P_k := \frac{P_k}{\|P_k\|}$, i wyznaczamy wielomian optymalny w_2^* ze wzoru (14):

$$w_2^* = (\sqrt{x}, P_0)P_0 + (\sqrt{x}, P_1)P_1 + (\sqrt{x}, P_2)P_2$$

Uwagi:

- Standardowa baza $1, x, x^2, \dots, x^n$ daje b. często źle uwarunkowane układy równań normalnych
- Dla ciągów wielomianów ortogonalnych P_n współczynniki tych wielomianów w bazie $1, x, x^2, \dots, x^n$ szybko rosną wraz z n , np. trzynasty wielomian Czebyszewa ma już dwa współczynniki pięciocyfrowe
- Lepsze rezultaty daje zastosowanie reguły trójczłonowej

Aproxymacja jednostajna I

- Aproxymacja jednostajna = aproxymacja w przestrzeni C_F funkcji o wartościach rzeczywistych ciągłych na zbiorze $F \subset \mathbb{R}^k$, zwartym (czyli domkniętym i ograniczonym) z normą jednostajną zdefiniowaną jako:

$$\|f\| = \max_{x \in F} |f(x)|$$

- Można pokazać, że dla dowolnej funkcji $f \in C_F$ istnieje element optymalny h^* względem dowolnie skończonego wymiarowego podprzestrzeni $U \subset C_F$
- Problem jednoznaczności i konstrukcji elementu optymalnego nie jest rozwiązywalny tak prosto jak dla przestrzeni unitarnych. Można pokazać przykłady funkcji i przestrzeni skończonego wymiarowych względem których istnieje kilka różnych elementów optymalnych. Jednoznaczność rozwiązania jest charakteryzowana tzw. *własnością Haara*

Aproxymacja jednostajna II

- *Jednoznaczność rozwiązania.* Definicja. Podprzestrzeń liniowa $U \subset C_F$ skończonego wymiaru n spełnia *warunek Haara* (ma *własność Haara*), jeżeli każda funkcja z U , nie równa tożsamościowo zeru, znika co najwyżej w $n - 1$ punktach zbioru F .
- W przypadku aproxymacji funkcji $f \in C_{[a,b]}$ wielomianami, element optymalny dla f względem podprzestrzeni W_n jest nazywany n -tym wielomianem optymalnym dla f na odcinku $[a, b]$.

Przykład I

Przestrzeń liniowa wielomianów trygonometrycznych

$$t_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

stopnia m nie większego od ustalonego n jest podprzestrzenią wymiaru $2n + 1$ przestrzeni \tilde{C} funkcji ciągłych o okresie 2π

Rozpatrzmy funkcje na odcinku $[0, 2\pi - \varepsilon]$, $\tilde{C} = C_{[0, 2\pi - \varepsilon]}$. Dla dowolnego $\varepsilon < 2\pi$ ta przestrzeń spełnia warunek Haara.

Jak to pokazać? Korzystamy ze wzorów Eulera:

$$\cos kx = \frac{(e^{ix})^k + (e^{-ix})^k}{2}, \quad \sin kx = -\frac{(e^{ix})^k - (e^{-ix})^k}{2}i$$

Po podstawieniu i przekształceniach otrzymujemy:

$$t_n(x) = \frac{1}{2} e^{-ixn} \sum_{k=0}^{2n} c_k (e^{ix})^k$$

Przykład II

gdzie

$$c_k = \begin{cases} a_{n-k} + ib_{n-k} & \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1 \\ 2a_0 & \text{dla } k = n \\ a_{k-n} - ib_{k-n} & \text{dla } k = n+1, n+2, \dots, 2n \end{cases}$$

Zera wielomianu $t_n(x)$ są równe zerom funkcji $w(e^{ix})$, gdzie

$$w(t) := \sum_{k=0}^{2n} 2nc_k t^k$$

Wielomian $w(t)$ zeruje się w co najwyżej $2n$ różnych punktach $t = e^{ix_k}$.
 Funkcja $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ jest różnowartościowa na odcinku $[0, 2\pi - \varepsilon]$
 \Rightarrow wielomian $t_n(x)$ ma w tym przedziale co najwyżej $2n$ różnych zer x_k .

Warunek Haara I

- Można pokazać następujące twierdzenie. Dla dowolnej funkcji $f \in C_F$ istnieje dokładnie jeden element optymalny względem skończenie wymiarowej podprzestrzeni $U \Leftrightarrow$ gdy podprzestrzeń U spełnia warunek Haara
- Z powyższego wynika, że zadanie jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej wielomianami algebraicznymi lub trygonometrycznymi ograniczonego stopnia ma jednoznaczne rozwiązanie

Warunek Haara II

Równoważność warunków

Własność Haara n -wymiarowej podprzestrzeni $U \subset C_F$ jest równoważna każdemu z warunków

- (a) Dla dowolnych różnych punktów x_1, x_2, \dots, x_n , ($x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$) ze zbioru F i dowolnej bazy f_1, f_2, \dots, f_n podprzestrzeni U wyznacznik

$$\Delta := \det \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{bmatrix}$$

jest różny od zera.

- (b) Dla dowolnych różnych punktów x_1, x_2, \dots, x_n , ($x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$) ze zbioru F i dowolnych liczb rzeczywistych y_1, y_2, \dots, y_n istnieje w U dokładnie jeden element w spełniający warunki interpolacyjne $w(x_i) = y_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$

Twierdzenie o alternansie

Twierdzenie Czebyszewa o alternansie

Niech C_F będzie przestrzenią funkcji ciągłych na zbiorze zwartym $F \subset [a, b]$, a U jej podprzestrzenią liniową wymiaru n . Funkcje z U są określone i ciągłe na całym odcinku $[a, b]$ i spełniają w nim warunek Haara.

Funkcja h^* jest dla f elementem optymalnym względem U , tzn.

$$\|f - h^*\| = \inf_{h \in U} \|f - h\| = \inf_{h \in U} \max_{x \in F} |f(x) - h(x)|$$

wtw gdy zbiór F zawiera co najmniej $n + 1$ punktów x_k , $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$ takich, że dla stałego z , $z = 1$ lub $z = -1$, dla $k = 1, 2, \dots, n + 1$ są spełnione równości

$$f(x_k) - h^*(x_k) = (-1)^k z \|f - h^*\| \tag{15}$$

Zbiór punktów x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , w których różnica $f - h^*$ przyjmuje maksymalną wartość ze znakami na przemian dodatnim i ujemnym, nazywamy *alternansem*.

Wyznaczanie elementu optymalnego

Element optymalny dla $f \in C_F$, $F \subset R$.

Rozważmy przypadek (najprostszy), w którym F jest zbiorem $n + 1$ punktów x_1, x_2, \dots, x_{n+1} . Niech U będzie n wymiarową podprzestrzenią C_F , a f_1, f_2, \dots, f_n bazą U .

Element optymalny h^* dla f względem U można przedstawić jako kombinację liniową:

$$h^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$$

Z tw. Czebyszewa o alternansie w tym przypadku alternans stanowi cały zbiór $F \Rightarrow$ warunki (15) można zapisać jako układ $n + 1$ równań liniowych:

$$\alpha_1 f_1(x_k) + \alpha_2 f_2(x_k) + \dots + \alpha_n f_n(x_k) + (-1)^k z_{\varepsilon_U}(f) = f(x_k) \\ k = 1, 2, \dots, n + 1$$

z $n + 1$ niewiadomymi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, z_{\varepsilon_U}(f)$.

Macierz tego układu jest nieosobliwa, potrzebne są metody rozwiązywania liniowych układów równań w ogólnym przypadku.

W niektórych przypadkach można uprościć obliczenia.

Przykład 1

- Niech $F = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ - podprzestrzeń W_{n-1} wielomianów stopnia co najwyżej $n - 1$
- g - dowolna funkcja określona na F taka, że $g(x_k) = (-1)^k$ dla $k = 1, 2, \dots, n + 1$
- Funkcji g użyjemy do zapisu warunku (15) w postaci:

$$f(x_k) - h^*(x_k) = g(x_k)z_{\mathcal{E}U}(f), \quad k = 1, 2, \dots, n + 1 \quad (16)$$

gdzie $h^* \in W_{n-1}$

- Korzystamy z faktu, że iloraz różnicowy jest funkcją liniową oraz, że il. różn. rzędu n wielomianu st. $n - 1$ jest równy zero. Otrzymujemy wtedy:

$$f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = g[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]z_{\mathcal{E}U}(f)$$

- Do wyznaczenia $g[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ są potrzebne tylko wartości $g(x_k)$, które są znane. Stąd:

$$z_{\mathcal{E}U}(f) = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]}{g[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]}$$

Przykład II

- Wstawiając powyższe zależności do równości (16) i biorąc dowolne n spośród nich otrzymamy układ n warunków interpolacyjnych \Rightarrow można jednoznacznie wyznaczyć wielomian h^* . Jego współczynniki Newtona można obliczyć alg. ilorazów różnicowych.

Aproxymacja Padego I

- Zadania aproxymacyjne z funkcjami nie tworzącymi przestrzeni liniowych
- Przykładem mogą być funkcje wymierne postaci

$$r_{kl}(x) = \frac{p_k(x)}{q_l(x)} = \frac{a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + \dots + b_1 x + b_0} \quad (17)$$

- Z wielomianów (17) korzysta *aproxymacja Padego*
- Idea: niech

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

będzie rozwinięciem Maclaurina aproxymowanej funkcji f , tj.

$$c_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$$

Przybliżeniami Padego funkcji f są nazywane funkcje wymierne (17) tak konstruowane, aby przy danych k i l , w punkcie $x = 0$ wartości funkcji f i r_{kl} oraz możliwie wielu ich pochodnych były równe.

Aproxymacja Padego - cd II

$$a_j = \sum_{n=0}^l c_{j-n} b_n \quad (j = 0, 1, \dots, k; \quad b_n = 0 \quad \text{dla} \quad n > l) \quad (19)$$

Jeśli tylko wyznacznik

$$\det \begin{bmatrix} c_{k-l+1} & \cdots & c_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_k & \cdots & c_{k+l-1} \end{bmatrix}$$

jest różny od zera, to układ (18) ma jednoznaczne rozwiązanie. A znając współ. b_j można obliczyć a_j ze wzoru (19).

Przykład aproksymacji Pade III

co jest równoważne układowi równań

$$d_0 = 1 - a_0 = 0$$

$$d_1 = b_1 + 1 - a_1 = 0$$

$$d_2 = b_2 + b_1 + \frac{1}{2} = 0$$

$$d_3 = b_2 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6} = 0$$

po rozwiązaniu otrzymujemy funkcję aproksymacji Pade

$$r_{12}(x) = \frac{1 + \frac{1}{3}x}{1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2}$$

Podsumowanie

- Definicja aproksymacji
- Przestrzenie unormowane
- Przestrzeń unitarna, algorytmy ortogonalizacyjne
- Aproksymacja w przestrzeni unitarnej \Rightarrow aproksymacja średniokwadratowa
- Aproksymacja jednostajna
- Aproksymacja funkcjami wymiernymi

Metody numeryczne

Równania różniczkowe zwyczajne

IT/IO, WIMiP

Danuta Szeliga

AGH Kraków

Spis treści I

- 1 Spis treści
- 2 Równania różniczkowe
- 3 Zagadnienie początkowe Cauchy'ego
- 4 Metody różnicowe
 - Metoda Eulera
- 5 Metody jednokrokowe
- 6 Zbieżność i rząd metody
- 7 Metody Rungego-Kutty
- 8 Metody jawne i niejawne
- 9 Układy równań wyższych rzędów
- 10 Układy równań zwyczajnych pierwszego rzędu

Równania różniczkowe

Więkoszość zjawisk we wszystkich dziedzinach nauk ścisłych i przyrodniczych opisywana jest równaniami różniczkowymi, a w szczególności są to:

- równania Maxwell'a w fizyce
- równania ruchu harmonicznego w mechanice
- równania dyfuzji, przepływu ciepła
- równania odkształcania ciała
- stany nieustalone w obwodach elektrycznych (elektronika)
- warunki sterowalności układu (automatyka)

Zagadnienie początkowe Cauchy'ego I

- Zagadnienie rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, czyli równań postaci:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

gdzie f - funkcja dwu zmiennych

- Funkcję $y = y(x)$ określoną i różniczkowalną dla x należących do ustalonego przedziału $[a, b]$ nazywamy rozwiązaniem równania (1) jeśli

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad x \in [a, b] \quad (2)$$

- Równanie (1) może mieć wiele rozwiązań, np. rozwiązaniem równania $y' = y$ jest każda funkcja postaci $y(x) = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$

Zagadnienie początkowe Cauchy'ego II

- Narzucamy dodatkowy warunek dla zapewnienia jednoznaczności rozwiązania

- warunek początkowy

$$y(a) = ya \tag{3}$$

i wtedy wraz z równaniem (1) nosi nazwę *zagadnienia początkowego* lub *zagadnienia Cauchy'ego dla równania pierwszego rzędu*

lub

- warunek brzegowy

$$g(y(a), y(b)) = 0 \tag{4}$$

gdzie g jest daną funkcją dwóch zmiennych i wtedy wraz z równaniem (1) nosi nazwę *zagadnienia brzegowego*

Zagadnienie początkowe Cauchy'ego III

- Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (5)$$

- Równanie (5) może mieć jedno rozwiązanie, wiele rozwiązań lub być sprzeczne

Zagadnienie początkowe Cauchy'ego IV

- Kiedy istnieje jedno rozwiązanie?

Twierdzenie

Jeżeli $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x dla $x \in [a, b]$ i spełnia warunek Lipschitza ze względu na y , tzn. istnieje stała L taka, że dla dowolnych rzeczywistych y_1, y_2 i dla każdego $x \in [a, b]$ jest spełniona nierówność

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (6)$$

to dla każdego skończonego y_a istnieje dokładnie jedna funkcja $y(x)$ ciągła i różniczkowalna na $[a, b]$ taka, że

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{oraz} \quad y(a) = y_a \quad (7)$$

Zagadnienie początkowe Cauchy'ego V

- Najczęściej rozwiązanie zadania początkowego (5) wymaga użycia jakiejś przybliżonej metody całkowania tego zadania. Dla obliczeń numerycznych, w związku z błędami reprezentacji, zamiast zadania (5) rozwiążemy zadanie postaci

$$\begin{cases} z' = f(x, z) + \delta f(x) & x \in [a, b] \\ z(a) = y_a + \delta y_a \end{cases} \quad (8)$$

gdzie $\delta f(x)$ i δy_a są niewielkimi zaburzeniami f i y_a .

Jeśli funkcja f spełnia założenia powyższego twierdzenia, to zadanie jest poprawnie postawione.

Metody różnicowe

- Metody różnicowe wyznaczają przybliżenia jedynie wartości rozwiązania $y(x_i)$ w pewnych punktach x_i z przedziału całkowania $[a, b]$
- Rozważamy przypadki, gdy $x_i = a + ih$ dla $i = 0, 1, \dots, N$, gdzie wielkość $h = (b - a)/N$ to *krok całkowania*
- Główny postulat metod różnicowych: zbieżność wyznaczanych przez nie przybliżeń $y_i = y_i(h)$ do odpowiednich wartości $y(x_i)$, tzn.

$$y_i(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} y(x)$$

dla każdego ustalonego $x = a + ih$

Klasy metod różnicowych I

- *Metody jednokrokowe.* Konstruują ciąg przybliżeń $y_i \sim y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ zgodnie ze wzorem

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i) & i = 0, 1, \dots \\ y_0 = y_a \end{cases} \quad (9)$$

gdzie funkcja Φ_f może zależeć od f nieliniowo

- *Liniowe metody wielokrokowe.* Zdefiniowane są zależnościami

$$\begin{cases} \alpha_k y_{i+k} + \dots + \alpha_1 y_{i+1} + \alpha_0 y_i = h(\beta_k f_{i+k} + \dots + \beta_1 f_{i+1} + \beta_0 f_i) & i = 0, 1, \dots, N - k \\ y_j = y_j(h) & j = 0, 1, \dots, k - 1 \end{cases} \quad (10)$$

gdzie $f_j = f(x_j, y_j)$

Jest to metoda k -krokowa, jeśli $\alpha_k \neq 0$ oraz $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$

- Jeżeli funkcja Φ z metody jednokrokowej (9) zależy liniowo od f , to metoda ta jest szczególnym przypadkiem zależności dla metody wielokrokowej (10) dla $k = 1$, $\alpha_1 = 1, \alpha_0 = -1, \beta_1 = 0$.

Klasy metod różnicowych II

- W obu przypadkach zagadnienie różniczkowe jest przybliżane różnicowym zagadnieniem początkowym
- W przypadku metod jednokrokowych do wyznaczenia kolejnego przybliżenia y_i wystarcza znajomość tylko poprzedniego y_{i-1} . Rozpoczynając od znanej wartości $y_0 = y_a$ można obliczyć y_1 , a następnie dalsze y_i , $i = 2, 3, \dots, N$
- W przypadku metod wielokrokowych przy wyznaczaniu y_i korzysta się z k poprzednich wartości $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-k}$. Początkowych k przybliżeń musi więc być danych (lub obliczonych inną metodą).

Metoda Eulera I

- Sposobów wyprowadzania metod różnicowych może być wiele
- Niech $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = (a-b)/N$
- Pochodną $y_0(x)$ przybliżamy ilorazem różnicowym pierwszego rzędu opartym na węzłach x i $x + h$
- Niech $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = (a - b)/N$
- Jeśli funkcja $f \in C^1_{[a,b] \times \mathbb{R}}$, rozwiązanie y równania $y_0 = f(x, y)$ jest klasy $C^2_{[a,b]}$ i ze wzoru Taylora z resztą otrzymujemy równość

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{h^2}{2}y''(\xi) \quad \xi \in [x, x+h] \quad (11)$$

Metoda Eulera II

- Ponieważ

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (12)$$

więc w punktach $x = x_i$ zachodzi

$$\begin{cases} y'(x_{i+1}) = f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + g_i \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (13)$$

gdzie

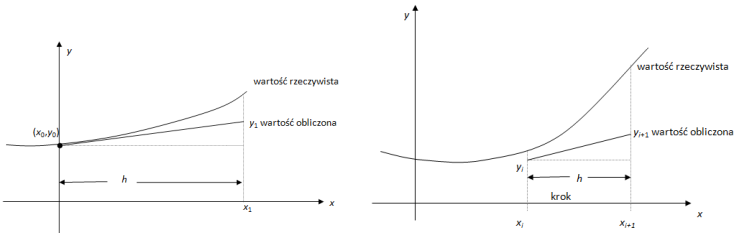
$$|g_i| \leq M_2 h^2, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} \frac{|y''(x)|}{2} \quad (14)$$

- Odrzucając w równaniu (14) nieznanne składniki g_i , otrzymujemy metodę Eulera konstruującą ciąg przybliżeń $\{y_i\}$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_0 = y_a \end{cases} \quad (15)$$

Metoda Eulera III

- Interpretacja graficzna



Przykład równania różniczkowego

- Równanie przewodnictwa cieplnego
- Kula nagrzana do temperatury 1200 K schładza się do temperatury otoczenia. Jeżeli w procesie chłodzenia ciepło oddawane jest do otoczenia tylko przez radiację, to zmiana temperatury opisana jest równaniem

$$\frac{dT}{dt} = \alpha (T^4 - \beta)$$
$$T(0) = T_0$$

- Jaka będzie temperatura kuli po 300 sekundach chłodzenia?

Metoda Eulera. Błąd

- Globalny błąd metody Eulera $e_i := y(x_i) - y_i$

$$e_{i+1} = e_i + h(f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)) + g_i, \quad |g_i| \leq M_2 h^2 \quad (16)$$

- Można pokazać, że błąd spełnia nierówność

$$|e_i| \leq M_2 h(x_i - a) \leq M_2(b - a)h \quad (17)$$

A zatem błąd jest proporcjonalny do h

- Oszacowanie błędu można również pokazać wykorzystując funkcję Lipschitza $E_L(x)$ zdefiniowaną jako

$$E_L(x) := \begin{cases} \frac{e^{Lx} - 1}{L} & \text{dla } L \neq 0 \\ x & \text{dla } L = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Przy tych oznaczeniach można zapisać oszacowanie błędu metody Eulera w postaci

$$|e_i| \leq M_2 h E_L(x_i - a) \leq Kh, \quad K = M_2 E_L(b - a) \quad (19)$$

Metoda Eulera. Modyfikacje

- Metoda Eulera (ME) jest wolno zbieżna
- Modyfikacje ME, szybciej zbieżne
 - metoda Heuna (ulepszona metoda Eulera)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))) \quad (20)$$

- zmodyfikowana metoda Eulera

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(x_i, y_i)) \quad (21)$$

- Obie modyfikacje, choć przyspieszają zbieżność, zwiększają jednocześnie przeszło dwukrotnie koszt jednego kroku metody

Metody jednokrokowe

- Metodę Eulera i jej modyfikacje można zapisać w postaci

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h) & x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_0 = y_a \end{cases} \quad (22)$$

z różnymi funkcjami $\Phi = \Phi_f(x, y; h)$

W metodzie Eulera $\Phi_f(x, y; h) = f(x, y)$

- Zależność (22) nazywamy ogólną postacią metod jednokrokowych
- Funkcja Φ , zwana jest metodą lub *funkcją przyrostu względnego*
- Od funkcji Φ zależy czy i jak szybko ciąg $\{y_i\}$ jest zbieżny do wartości rozwiązania $y(x)$

Zbieżność metody II

- Dla równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ odpowiednikiem funkcji Φ dla równania różnicowego (22) jest funkcja dokładnego przyrostu względnego $\Delta = \Delta_f(x, y; h)$ zdefiniowana następująco:

$$\Delta_f(x, y; h) := \begin{cases} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} & h \neq 0 \\ f(x, y) & h = 0 \end{cases} \quad (23)$$

gdzie $z(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego
 $z'(t) = f(t, z(t))$, $z(t) = y$

Rząd metody I

Rząd metody

Największą liczbę całkowitą p taką, że dla każdej funkcji f z pewnej klasy \mathcal{F} istnieje taka stała $C = C(f) < \infty$, że dla $x \in [a, b]$, dowolnych rzeczywistych y i $h \in [0, h_0]$ zachodzi nierówność:

$$|\Phi_f(x, y; h) - \Delta_f(x, y; h)| \leq C h^p \quad (24)$$

nazywamy rzędem metody Φ w klasie \mathcal{F} .

- \mathcal{F} jest na ogół klasą funkcji odpowiednio regularnych
- Przykłady
 - W metodzie Eulera $\Phi(x, y; h) = f(x, y)$. Jeżeli funkcję Δ rozwiniemy w szereg Taylora, to dla funkcji $f(x, y(x)) \in C^1_{[a,b]}$ takich, że $\frac{df}{dx} \neq 0$ otrzymamy:

$$\Phi(x, y(x); h) - \Delta(x, y(x); h) = \mathcal{O}(h)$$

czyli metoda jest rzędu $p = 1$.

Rząd metody II

- Dla ulepszonej metody Eulera

$$\Phi(x, y(x); h) = \frac{1}{2} h(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)))$$

Korzystając z rozwinięcia Taylora dla funkcji Φ i Δ i obliczając $\Phi(x, y; h) - \Delta(x, y; h)$ otrzymujemy, że metoda jest rzędu $p = 2$.

- Teoretycznie, klasycznym sposobem określenia funkcji Φ tak, aby metoda była rzędu p , jest przyjęcie za $\Phi(x, y; h)$ sumy częściowej rozwinięcia Taylora funkcji Δ

$$S_{p-1}(x, y; h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{d^j f}{dx^j}(x, y) \frac{h^j}{(j+1)!}$$

Wtedy

$$\Phi(x, y(x); h) - \Delta(x, y(x); h) \cong \frac{d^p f}{dx^p}(x, y) \frac{h^p}{(p+1)!}$$

i metoda jest rzędu p .

Wadą takiego rozwiązania jest to, że koszt jednego kroku metody rzędu p na ogół szybko rośnie wraz ze wzrostem p .

Metody Rungego-Kutty I

- Klasa metod Rungego-Kutty (RK) jest zdefiniowana przez rodzinę funkcji Φ postaci

$$\begin{cases} \Phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^r c_i k_i \\ k_i = k_i(x, y; h) = f\left(x + h \sum_{j=1}^r b_{ij}, y + \sum_{j=1}^r b_{ij} k_j\right) \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (25)$$

zależnych parametrycznie od wielkości $c_i, b_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, r$

- Jeżeli wszystkie $b_{ij} = 0$ dla $j \geq i, i = 1, 2, \dots, r$ to równania definiujące wielkości k_i dla ustalonych x i y redukują się do postaci

$$k_i = f\left(x + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}, y + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (26)$$

Stanowią one układ zależności rekurencyjnych, liniowych ze względu na kolejne k_i

Ten typ metod RK nosi nazwę *otwartych* (ang. explicit)

Metody Rungego-Kutty II

- Przy ustalonej liczbie r koszt jednego kroku metody (tzn. obliczenia kolejnego y_i) jest równy kosztowi obliczenia r wartości funkcji f i nie zależy od wyboru parametrów c_i , b_i . Wielkości te dobiera się tak, aby przy ustalonym r rząd metody był możliwie najwyższy (wtedy metoda jest najbardziej efektywna).
- Można pokazać, że maksymalny rząd $p(r)$ metody RK korzystającej z r wartości funkcji f jest równy $p(r) = r$.

Metoda RK czwartego rzędu I

- Konstrukcja schematu RK dla $r = 4$
- Metoda Φ jest rzędu r , jeśli

$$\Phi(x, y; h) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\partial^j \Phi}{\partial h^j}(x, y; 0) \frac{h^j}{j!} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{d^j f}{dx^j}(x, y) \frac{h^j}{(j+1)!} + \mathcal{O}(h^r) \quad (27)$$

- Przyjmując za $j = 0, 1, 2, 3$ otrzymamy metodę rzędu 4
- Podstawiając za Φ funkcję

$$\Phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^4 c_i k_i(x, y; h)$$

gdzie k_i są określone wzorem (26), dostajemy dla $j = 0, 1, 2, 3$ warunki na szukane współczynniki metody RK

$$\frac{\partial^j \Phi(x, y; 0)}{\partial h^j} = \sum_{i=1}^4 c_i \frac{\partial^j k_i(x, y; 0)}{\partial h^j} = \frac{1}{(j+1)!} \frac{d^j f}{dx^j}(x, y)$$

Metoda RK czwartego rzędu II

Przykładowo dla $j = 0$ jest to równość $\sum_{i=1}^4 c_i = 1$.

- Uwzględniając pozostałe warunki otrzymuje się nieliniowy układ równań, który w ogólnej postaci jest trudny do rozwiązania.
- Jej szczególnym przypadkiem jest tzw. klasyczna metoda RK czwartego rzędu określona wzorami:

$$\begin{cases} \Phi(x, y; h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x, y) \\ k_2 = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x + h, y + hk_3) \end{cases} \quad (28)$$

- Ciąg przybliżeń konstruowany jest zgodnie ze wzorem

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h), & i = 0, 1, \dots, N \\ y_0 = y_a \end{cases} \quad (29)$$

Metody jawne i niejawne

Przykład. Dokładność obliczeń

Metoda Eulera

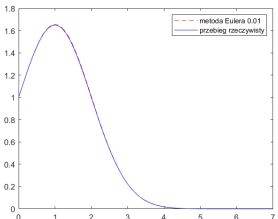
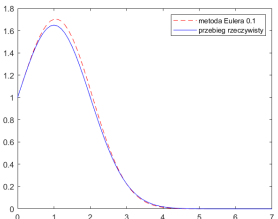
Rozpatrzmy równanie

$$y' = y(1 - t), \quad y(0) = 1 \quad (30)$$

Rozwiązaniem dokładnym jest równanie postaci

$$y = \exp\left(t - \frac{t^2}{2}\right)$$

Wykonajmy obliczenia metodą Eulera z krokiem $h = 0.1$ oraz $h = 0.01$.
Poniżej porównanie rozwiązań:



Przykład. Niestabilność numeryczna

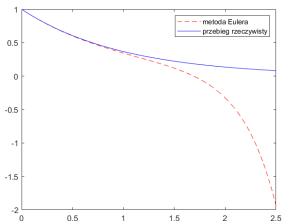
Rozpatrzmy równanie postaci:

$$y' = 3y - 4 \exp(-x), \quad y(0) = 1$$

Rozwiązanie dokładne jest postaci

$$y = \exp(-x)$$

Dla warunku początkowego $y(0) = 1$ *każda* metoda numeryczna rozwiązywania równań różniczkowych będzie niestabilna:

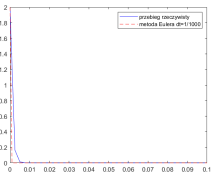
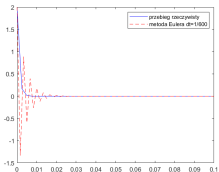
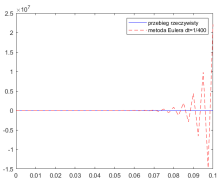


Przykład. Równanie sztywne

Rozpatrzmy równanie postaci

$$y' = -1000y, \quad y(0) = 2$$

Rozwiązanie dokładne jest postaci: $y = 2 \exp(-1000x)$ Rozpatrzmy rozwiązania numeryczne metodą Eulera z różnymi krokami:



Problem: równanie wymaga bardzo małego kroku na początku, ale później krok ten staje się zbyt mały i nie można rozwiązać zagadnienia dla dłuższego zakresu czasowego.

Wniosek: metody jawne mają problem z rozwiązywaniem równań sztywnych. Rozwiązaniem jest zastosowanie metod niejawnych.

Niejawna metoda Eulera I

- Ogólny schemat niejawnej metody Eulera:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

- Koszt używania metody niejawnej: na każdym kroku trzeba rozwiązać równanie (najczęściej nieliniowe):

$$y_{i+1} - hf(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i$$

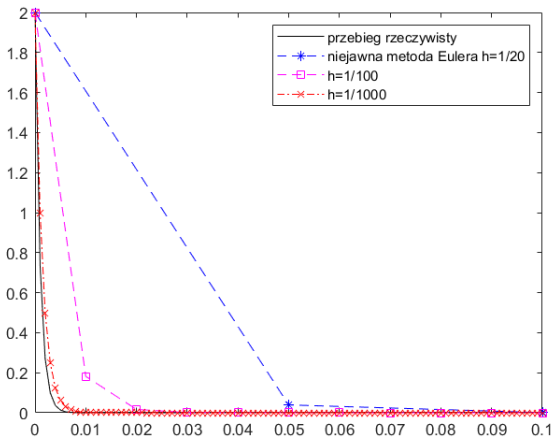
- Przykład. Rozpatrzmy ponownie równanie $y' = -1000y$, $y(0) = 2$
Stosując niejawną metodą Eulera otrzymujemy:

$$y_{i+1} = y_i - 1000hy_{i+1}$$

I wyliczamy y_{i+1} : $y_{i+1} = \frac{y_i}{1+1000h}$ albo $y_i = \frac{y_0}{(1+1000h)^i}$

Przy tym rozwiązaniu biorąc nawet $h = 1$ dostajemy $y_i = 2/1001^i$.

Niejawna metoda Eulera II



Układy równań

Układy równań wyższych rzędów

- Dane jest równanie następującej postaci z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned}
 y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\
 y(a) &= a_0, \quad y'(a) = a_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = a_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

- Wprowadźmy nowe zmienne postaci:

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad \dots, \quad z_n = y^{(n-1)}$$

- Układ równań (31) zastępujemy układem postaci:

$$\begin{cases}
 (y)' = y' \\
 (y')' = y'' \\
 \dots \\
 (y^{(n-2)})' = y^{(n-1)} \\
 (y^{(n-1)})' = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 z_1' = z_2 \\
 z_2' = z_3 \\
 \dots \\
 z_{n-1}' = z_n \\
 z_n' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n)
 \end{cases}
 \tag{32}$$

Przykład

Układy równań wyższych rzędów

Rozpatrzmy układ równań:

$$\begin{cases} y'' + ky = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = -kz_1 + f(t) \\ z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 1 \end{cases}$$

Układy równań zwyczajnych pierwszego rzędu

Układy równań zwyczajnych pierwszego rzędu I

- Zagadnienie początkowe dla układu n równań zwyczajnych pierwszego rzędu definiujemy następująco

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}) & x \in [a, b] \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a \end{cases} \quad (33)$$

gdzie $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ jest daną n -wymiarową funkcją wektorową $n + 1$ zmiennych x i $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$.

- Funkcję wektorową $\mathbf{y}(x) = (\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_n(x))$ określoną i różniczkowalną dla $x \in [a, b]$ nazywamy rozwiązaniem zagadnienia (33), jeśli

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = f(x, \mathbf{y}(x)) & x \in [a, b] \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a \end{cases}$$

Układy równań zwyczajnych pierwszego rzędu III

- Układ (34) ma teoretycznie rozwiązanie postaci

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{u}_1(x) + \mathbf{u}_2(x)$$

gdzie $\mathbf{u}_1(x)$ jest pewną szczególną całką (na ogół łatwą do wyznaczenia), a $\mathbf{u}_2(x) = \sum_{s=1}^n \mathbf{c}_s \mathbf{w}_s e^{\mathbf{A}_s x}$, gdzie c_s są współczynnikami liczbowymi, \mathbf{w}_s wektorami własnymi macierzy J . Funkcja $\mathbf{u}_2(x)$ to funkcja dopełniająca

- Dla dostatecznie dużych x rozwiązanie można przybliżyć $\mathbf{y}(x) \approx \mathbf{u}_1(x)$, co wynika z warunku sztywności (a): $\mathbf{u}_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, więc równanie (34) całkuje się tylko w takim przedziale, w którym wartości $\mathbf{u}_2(x)$ nie są jeszcze zaniedbywalne w stosunku do wartości $\mathbf{u}_1(x)$

Metody numeryczne

Równania nieliniowe

Metody numerycznego znajdowania miejsc zerowych funkcji jednej zmiennej

- Metoda iteracji prostej.
- Metoda stycznych (Newtona).
- Metoda siecznych

- Metoda połowienia (bisekcji).
- Metoda fałszywej linii (*regula falsi*).
- Metoda Pegaza

- Metody znajdowania zer wielomianów

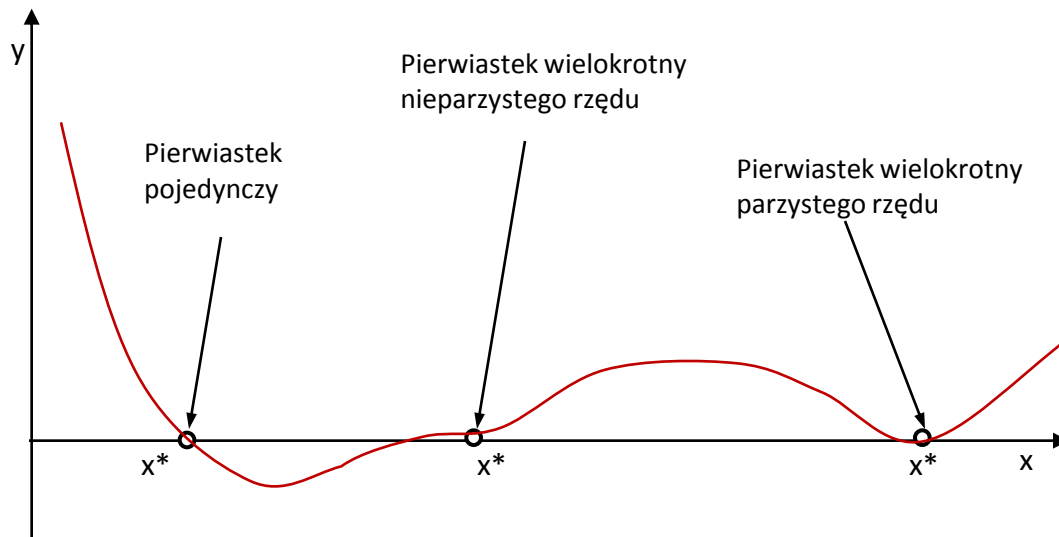
$$f(x^*) = 0$$

$$f(x) = (x - x^*)g(x)$$

x^* - pierwiastek pojedynczy

$$f(x) = (x - x^*)^n g(x)$$

x^* - pierwiastek wielokrotny rzędu n



Twierdzenia

Twierdzenie 1.

Niech $f \in C^n[a, b]$. Wtedy $x^* \in [a, b]$ jest pierwiastkiem n -krotnym f wtedy i tylko wtedy gdy

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(n-1)}(x^*) = 0 \text{ i } f^{(n)}(x^*) \neq 0.$$

Twierdzenie 2.

Jeżeli x^* jest pierwiastkiem n -krotnym f i f jest odpowiednio wysokiej klasy to x^* jest pierwiastkiem pojedynczym funkcji

$$g(x) = f(x)/f'(x).$$

Twierdzenie 3 (Bolzano).

Jeżeli f jest ciągła w $[a, b]$ i $f(a)f(b) < 0$ to f ma przynajmniej jeden pierwiastek w $[a, b]$.

Ogólny schemat metod iteracyjnego znajdowania zer funkcji

1. Przekształcamy równanie $f(x)=0$ do postaci

$$x=f(x)$$

poprzez podstawienie

$$f(x)=x-g(x)f(x)$$

gdzie g jest funkcją ciągłą i $g^1 0$.

Punkt x^* taki, że równanie jest spełnione nazywa się *punktem stałym*. Często postać $x=f(x)$ równania jest jego postacią „naturalną”; wtedy mówimy o metodzie *iteracji prostej*

2. Tworzymy ciąg kolejnych przybliżeń $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p)}, \dots$ (w założeniu zbieżny do x^*) taki, że

$$x^{(p+1)}=f(x^{(p)})$$

gdzie $x^{(0)}$ jest przybliżeniem początkowym. Taka procedura jest nazywana *procedurą iteracyjną* a funkcja f *funkcją iteracyjną*.

3. Procedurę iteracyjną kończymy, jeżeli kolejne przybliżenia x^* różnią się odpowiednio mało (zbieżność) lub wykonaliśmy maksymalną zadaną liczbę kroków (brak zbieżności).

Twierdzenia

Twierdzenie o istnieniu punktu stałego

Równania $x=f(x)$ posiada przynajmniej jedno rozwiązanie w przedziale $I=[a,b]$, jeżeli

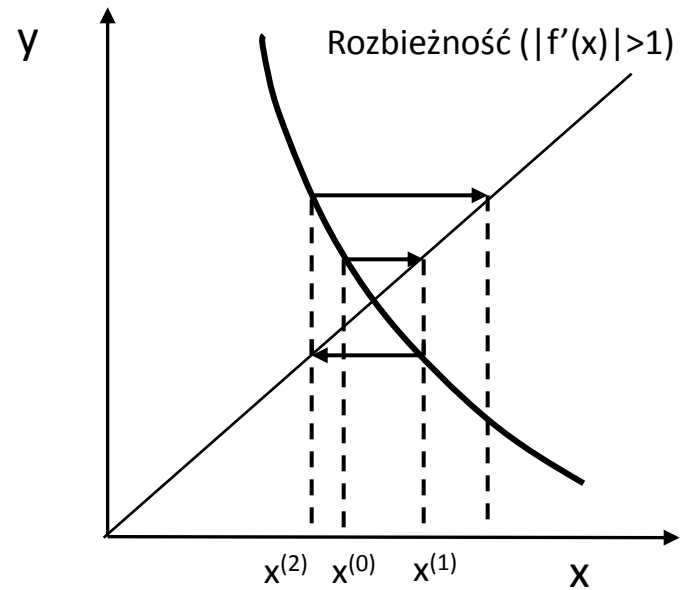
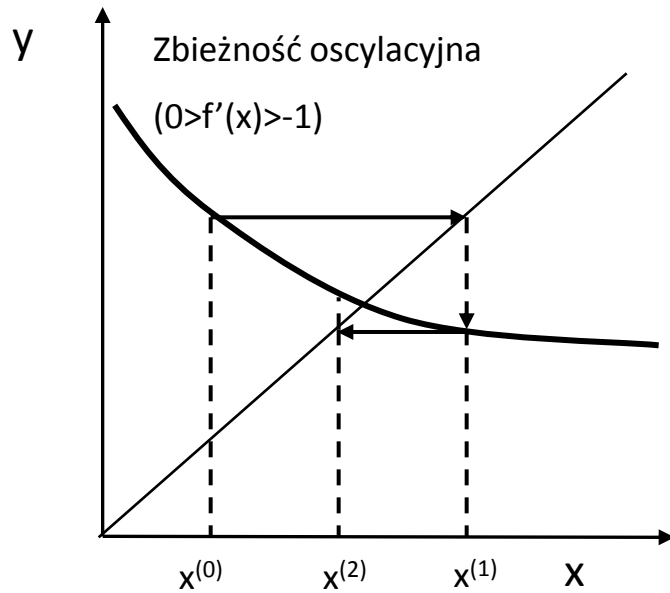
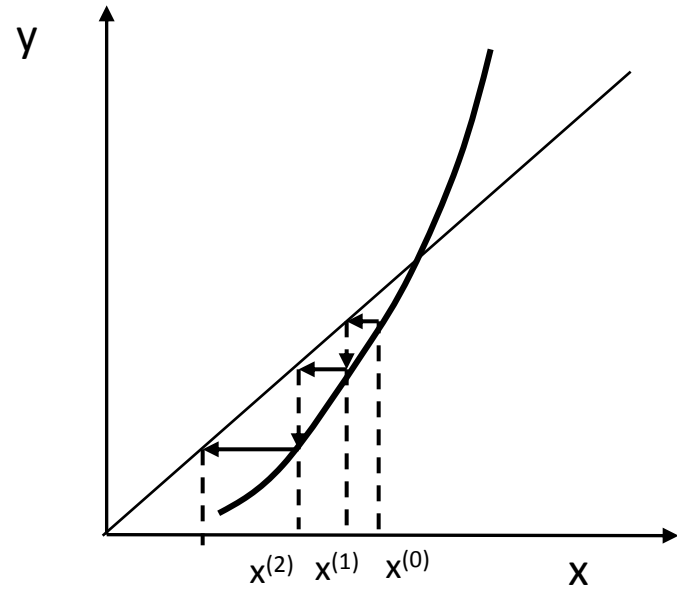
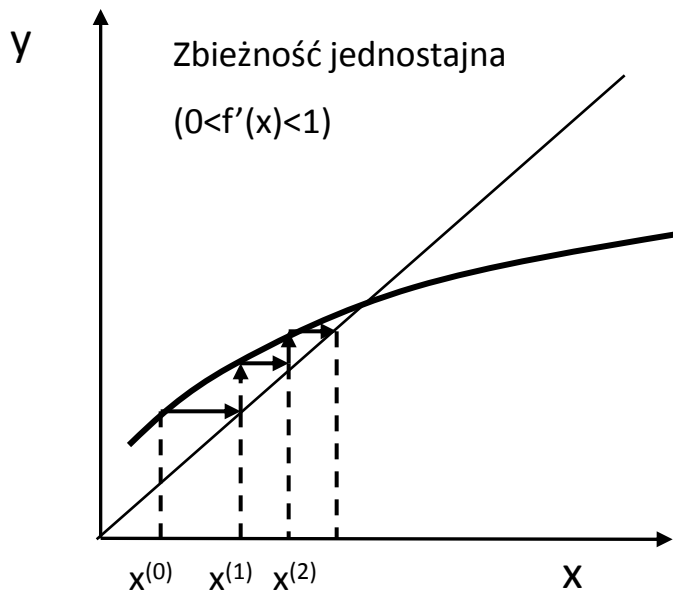
- (i) f jest funkcją ciągłą w I ,
- (ii) $f(x) \in I$ dla wszystkich $x \in I$.

Twierdzenie o jednoznaczności punktu stałego

Równanie $x=f(x)$ posiada co najwyżej jedno rozwiązanie w przedziale I jeżeli pierwsza pochodna f jest w tym przedziale ograniczona w sensie Lipschitza, tj. istnieje taka stała L , że dla każdego x_1 i x_2 z przedziału I mamy

$$|f'(x_1)-f'(x_2)| \leq L|x_1-x_2|, 0 < L < 1$$

Jeżeli f spełnia warunki zawarte w obu twierdzeniach, to równanie $x=f(x)$ ma jedno i tylko jedno rozwiązanie w I (istnienie i jednoznaczność).



Zbieżność metody iteracyjnej

Metoda iteracyjna ma rząd zbieżności r , jeżeli

$$\left| x^{(p+1)} - x^* \right| \leq M \left| x^{(p)} - x^* \right|^r, \quad 0 < M < 1$$

Numeryczne szacowanie rzędu zbieżności

$$r \approx \frac{\log \left| x^{(p+1)} - x^{(p)} \right|}{\log \left| x^{(p)} - x^{(p-1)} \right|} \quad \text{dla odpowiednio dużych } p$$

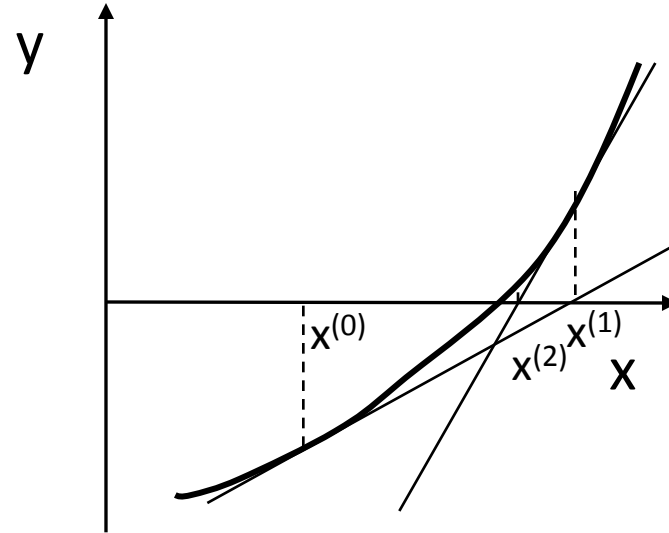
Metoda iteracji prostej jest najczęściej rzędu pierwszego

Metoda Newtona (metoda Newtona-Raphsona, metoda stycznych)

$$0 = f(x^*) = f(x^{(0)} + (x^* - x^{(0)})) \approx f(x^{(0)}) + (x^* - x^{(0)})f'(x^{(0)})$$

$$x^* \approx x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - \frac{f(x^{(p)})}{f'(x^{(p)})}$$



Metoda Newtona jest zawsze zbieżna dla funkcji wypukłych i monotonicznych
($f'(x) \neq 0$ i $f''(x) > 0$ dla każdego x)

Metoda Newtona jest zbieżna kwadratowo dla pierwiastków pojedynczych, natomiast liniowo dla pierwiastków wielokrotnych.

Tłumiona metoda Newtona

(pewniejsza zbieżność)

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - 2^{-k} \frac{f(x^{(p)})}{f'(x^{(p)})}$$

k jest najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną taką, że $|f(x^{(p+1)})| < |f(x^{(p)})|$

Zmodyfikowana metoda Newtona do znajdowania pierwiastków wielokrotnych

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - r \frac{f(x^{(p)})}{f'(x^{(p)})}$$

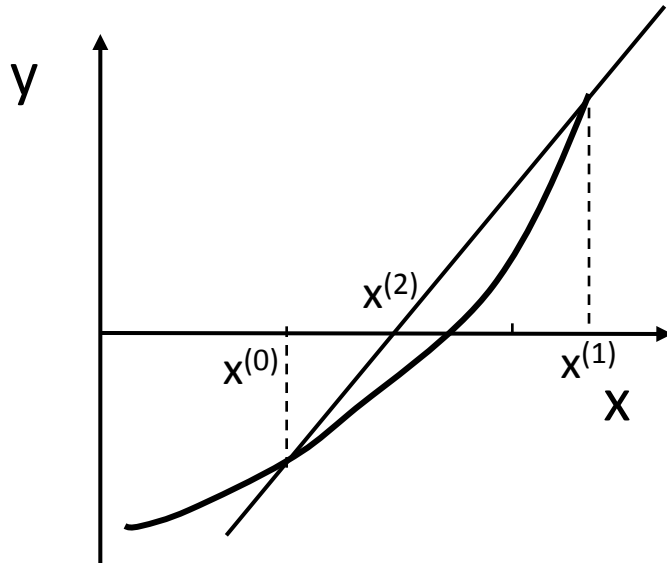
jeżeli znamy rząd pierwiastka r

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - \frac{f'(x^{(p)})^2}{f'(x^{(p)})^2 - f(x^{(p)})f''(x^{(p)})} \frac{f(x^{(p)})}{f'(x^{(p)})}$$

jeżeli nie znamy rzędu pierwiastka

W tym przypadku oryginalne równanie $f(x)=0$ zastępujemy równaniem $f(x)/f'(x)=0$.

Metoda siecznych (metoda *regula falsi*)



$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - \frac{x^{(p)} - x^{(p-1)}}{f(x^{(p)}) - f(x^{(p-1)})} f(x^{(p-1)})$$

Rząd zbieżności metody siecznych wynosi $r = (1 + \sqrt{5})/2$

Metoda siecznych nie musi być zawsze zbieżna

Dla pierwiastków wielokrotnych $f(x)$ zastępujemy przez $h(x) = \frac{f(x)^2}{f(x+f(x)) - f(x)}$

Metoda fałszywej linii (*regula falsi*)

(uproszczona metoda *regula falsi*)

1. Start z $x^{(0)}$ i $x^{(1)}$ takich, że $f(x^{(0)})f(x^{(1)}) < 0$ (funkcja ma różne znaki).
2. Do obliczenia następnego x stosujemy zmodyfikowany wzór metody siecznych

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - \frac{x^{(q)} - x^{(p-1)}}{f(x^{(q)}) - f(x^{(p-1)})} f(x^{(p-1)})$$

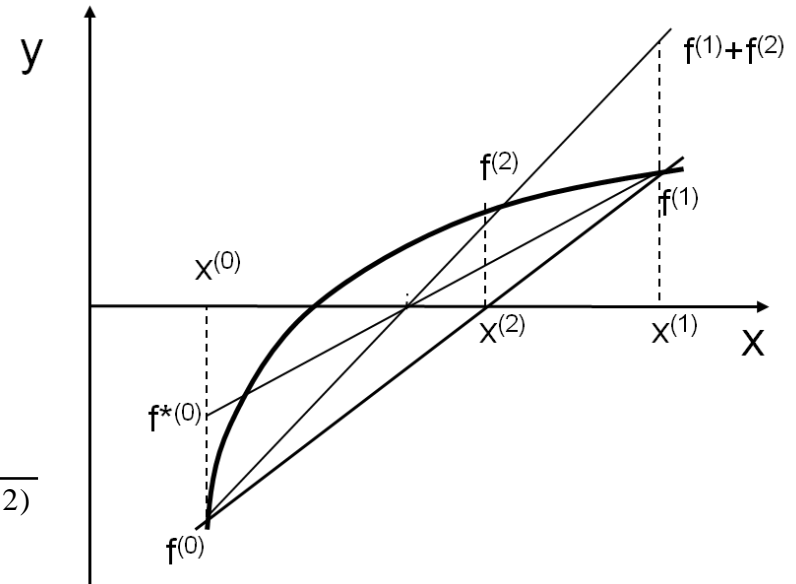
gdzie q jest największą liczbą całkowitą nie większą niż $p-2$ taką, że $f(x^{(p)})f(x^{(q)}) < 0$ (tj. funkcja ma różne znaki w $x^{(p)}$ i $x^{(q)}$ a zatem pierwiastek musi zawierać się w przedziale $[x^{(p)}, x^{(q)}]$ jeżeli funkcja jest ciągła

Metoda ma gwarantowaną zbieżność dla funkcji ciągłych ale jej rząd w ogólności wynosi 1 (wolna zbieżność).

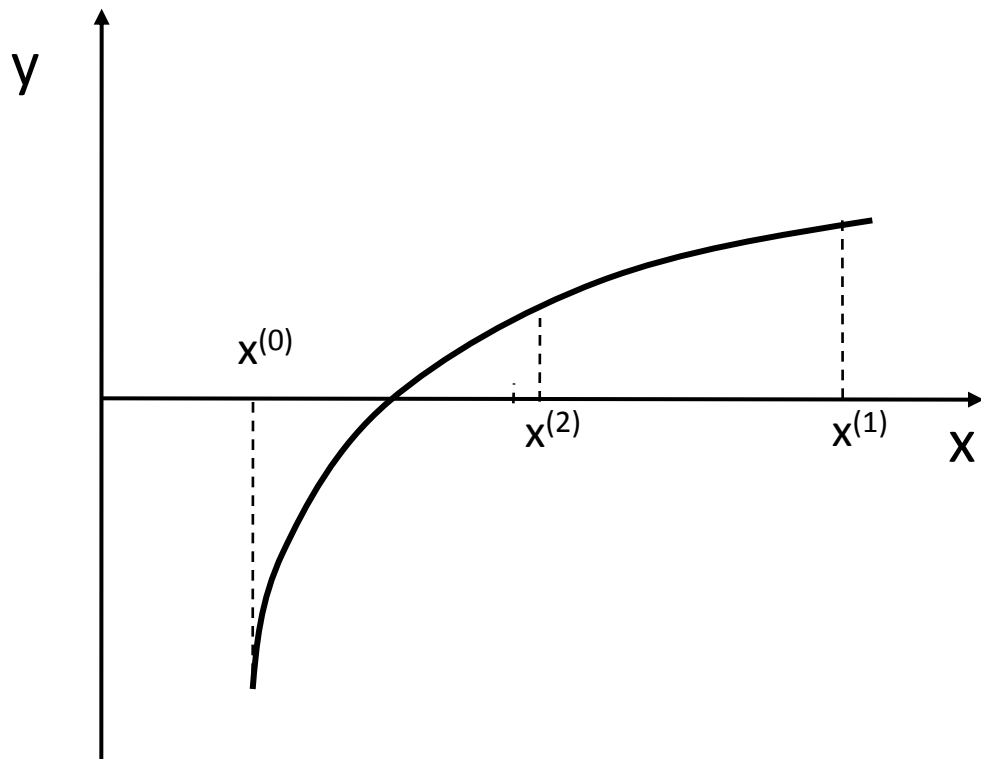
Metoda Pegaza

1. Startujemy jak w metodzie fałszywej linii z takich $x^{(0)}$ i $x^{(1)}$, że $f(x^{(0)})f(x^{(1)}) < 0$
2. Obliczamy punkt $x^{(2)}$ zgodnie z algorytmem metody siecznych. Jeżeli $|f(x^{(2)})| < \varepsilon$, kończymy proces iteracyjny
3. Jeżeli $f(x^{(1)})f(x^{(2)}) < 0$ (pierwiastek leży pomiędzy $x^{(1)}$ i $x^{(2)}$) wstawiamy $x^{(0)} = x^{(1)}$ i $x^{(1)} = x^{(2)}$ i przechodzimy do następnego kroku
4. Jeżeli $f(x^{(0)})f(x^{(2)}) < 0$ (pierwiastek leży pomiędzy $x^{(0)}$ i $x^{(2)}$) zastępujemy we wzorze metody siecznych $f^{(0)}$ przez $f^{*(0)} = f^{(0)}f^{(2)} / (f^{(1)} + f^{(2)})$, wyliczamy $x^{(2)}$ jeszcze raz i wstawiamy $x^{(1)} = x^{(2)}$
5. Sprawdzamy, czy $|x^{(2)} - x^{(1)}| < \varepsilon$
Jeżeli tak, to jeżeli $f(x^{(1)}) < f(x^{(2)})$ to za rozwiązanie przyjmujemy $x^{(1)}$, w przeciwnym przypadku $x^{(2)}$

$$f^{*(0)} = f^{(0)} \frac{f^{(2)}}{f^{(1)} + f^{(2)}}$$



Metoda połowienia (bisekcji)



1. Startujemy z takich $x^{(0)}$ i $x^{(1)}$, że $f(x^{(0)})f(x^{(1)}) < 0$.
2. Obliczamy $x^{(2)} = (x^{(0)} + x^{(1)})/2$. Jeżeli $|f(x^{(2)})| < \varepsilon$ kończymy proces iteracyjny.
3. Jeżeli $f(x^{(0)})f(x^{(2)}) < 0$ wstawiamy $x^{(1)} = x^{(2)}$, w przeciwnym przypadku $x^{(0)} = x^{(1)}$, $x^{(1)} = x^{(2)}$.

Metoda bisekcji jest rzędu pierwszego

Znajdowanie wszystkich pierwiastków równań algebraicznych (wielomianów)

$$f(x) = P_x(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots + a_nx^n$$

- Lokalizujemy pierwiastek o najmniejszym module (x^*_1).
- Po znalezieniu jego przybliżonej wartości dzielimy wielomian przez $(x-x^*_1)$, ignorujemy resztę z dzielenia a następnie szukamy następnego pierwiastka aż do rzędu n .
- Po znalezieniu przybliżeń wszystkich pierwiastków porządkujemy je od nowa od wartości najmniejszej do największej i powtarzamy cykl (procedura Wilkinsona).
- Przybliżenia poszczególnych pierwiastków poprawiamy stosując jakąkolwiek metodę szybko zbieżną (np. Newtona).

Do efektywnego znajdowania dobrych przybliżeń pierwiastków bardzo dobrze nadaje się metoda iteracji, w której wielomian interpoluje się odcinkami parboli. Pozwala to na lokalizację zarówno pierwiastków rzeczywistych jak i zespolonych.