



Geometria Obliczeniowa

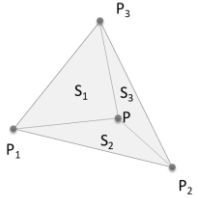
Podstawowe operacje

Prof. dr hab. inż. **Łukasz Madej**
Mgr inż. **Daniel Bachniak**, Mgr inż. **Mateusz Mojżeszko**
Katedra Informatyki Stosowanej i Modelowania
Wydział Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej

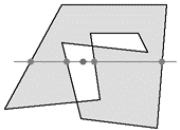
Budynek B5
p. 716
lmadej@agh.edu.pl
home.agh.edu.pl/lmadej



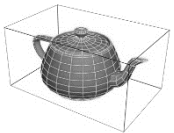
Plan



Wyznaczanie powierzchni wielokątów wypukłych
Wyznaczanie powierzchni wielokątów niewypukłych



Przynależność punktu do odcinka
Przynależność punktu do prostokąta
Przynależność punktu do wielokąta (**wstęp – kontynuacja wykład 3**)



Punkt przecięcia dwóch prostych
Punkt przecięcia prostej z okręgiem



Wyznaczanie powierzchni wielokątów

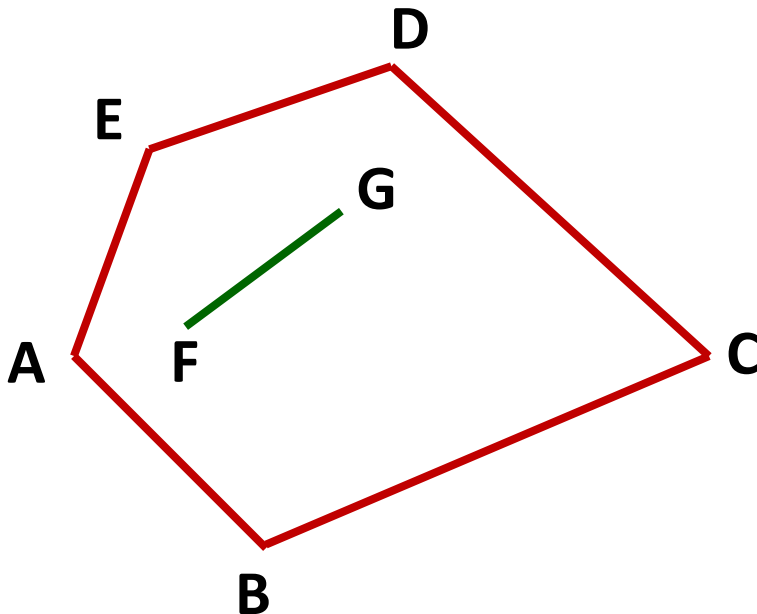


Wyznaczanie powierzchni wielokątów wypukłych

Wielokąty płaskie to takie, które spełniają dwa warunki:

- boki figury składają się z odcinków prostych, które tworzą zamkniętą przestrzeń,
- wierzchołki takiej figury muszą leżeć na jednej płaszczyźnie płaskiej, stanowiącej tą przestrzeń.

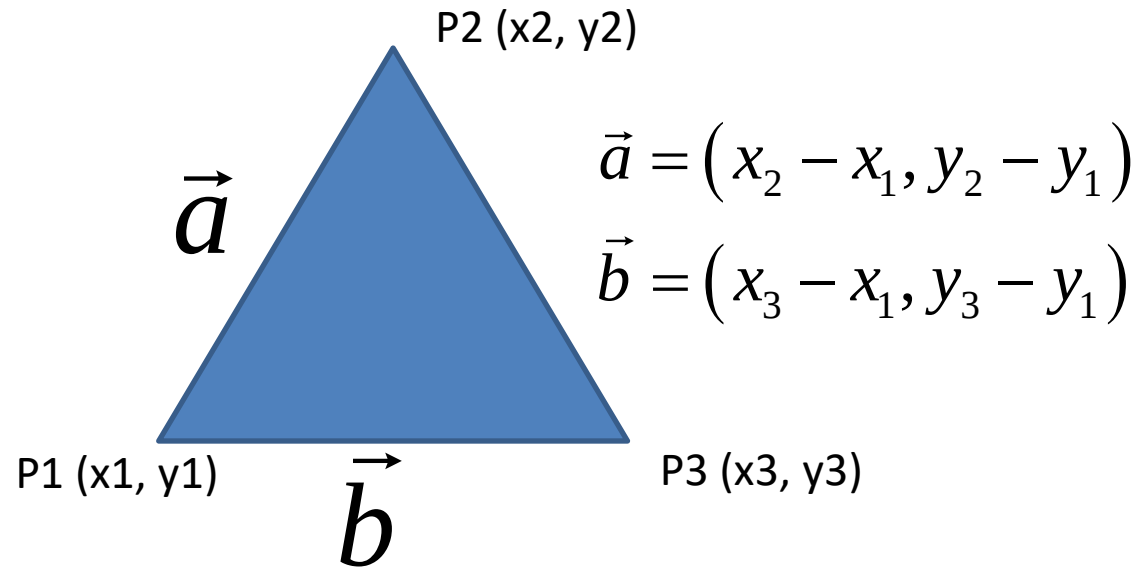
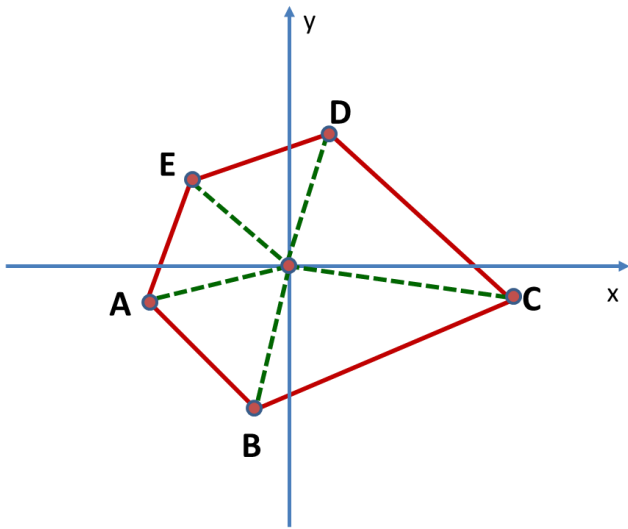
Wielokąty wypukłe - każdy odcinek, którego końce leżą wewnątrz wielokąta zawiera się całkowicie w takim wielokącie.





Wyznaczanie powierzchni wielokątów wypukłych

Wielokąt wypukły można podzielić na trójkąty, których sumaryczna powierzchnia jest równa powierzchni całego wielokąta



Z iloczynu wektorowego uzyskiwany jest wektor prostopadły do danych dwóch wektorów, którego połowa długości jest równa polu powierzchni trójkąta zbudowanego na tych wektorach.

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} |a \times b| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$$



Wyznaczanie powierzchni wielokątów wypukłych

$$P_{\Delta 1} = \frac{1}{2} |a \times b| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$$

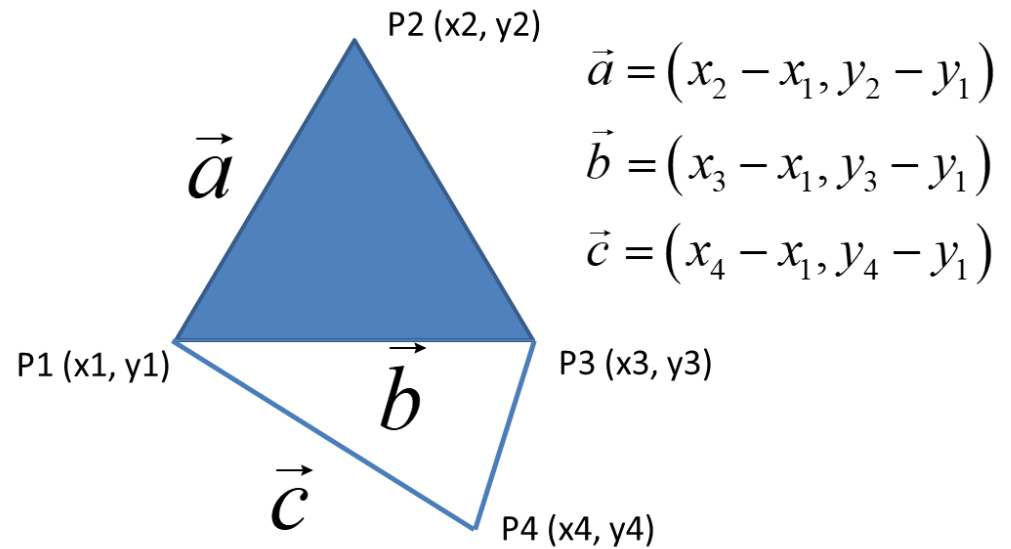
Zadanie

$$P_{\Delta 1} = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_1 - x_3 y_2 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_1 y_1]$$

$$P_{\Delta 1} = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_2 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 + x_1 y_2]$$



Wyznaczanie powierzchni wielokątów wypukłych



$$P_{\Delta 2} = \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_3 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_3 - y_1)]$$

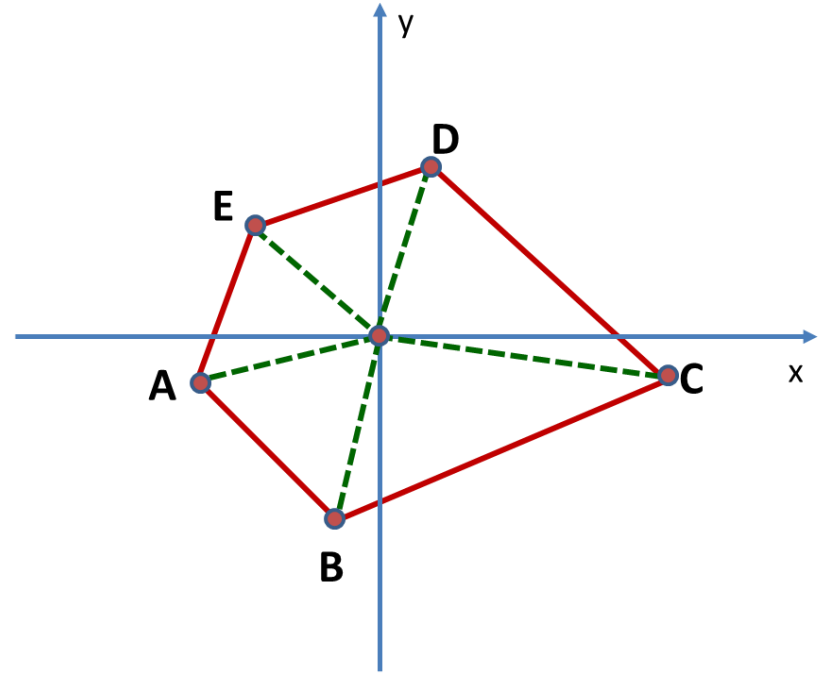
Zadanie

$$P_{\Delta 2} = \frac{1}{2} [x_3 y_4 - x_3 y_1 - x_1 y_4 + x_1 y_1 - x_4 y_3 + x_4 y_1 + x_1 y_3 - x_1 y_1]$$

$$P_{\Delta 2} = \frac{1}{2} [x_3 y_4 - x_3 y_1 - x_1 y_4 - x_4 y_3 + x_4 y_1 + x_1 y_3]$$



Wyznaczanie powierzchni wielokątów wypukłych



$$P = P_{\Delta_1} + \dots + P_{\Delta_N} =$$

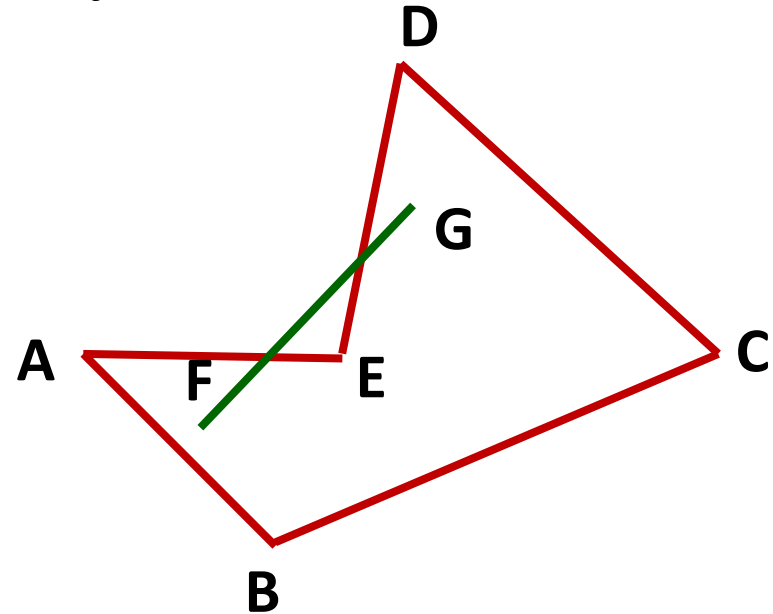
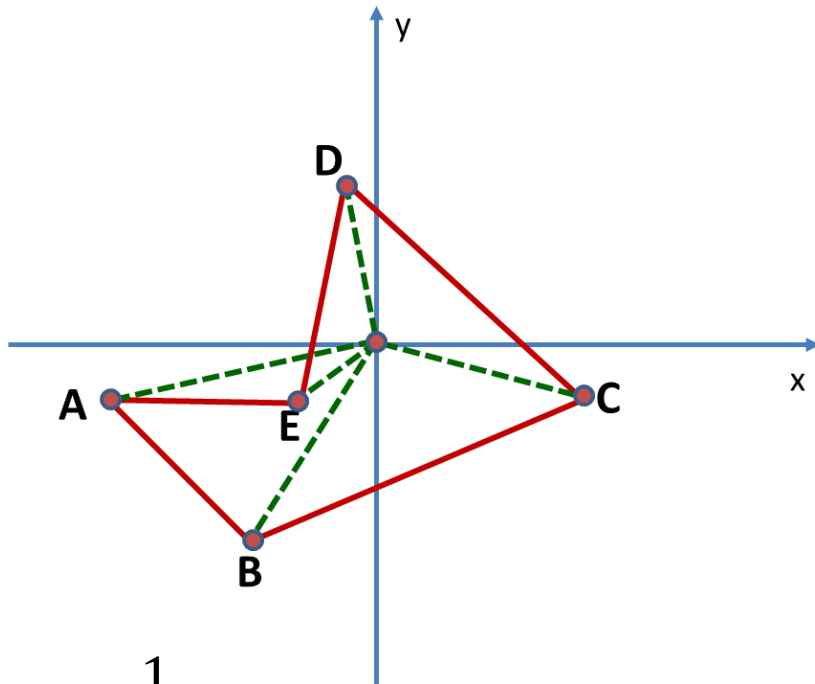
$$\frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2 + x_1 y_2 + \dots + x_{N-1} y_N - x_N y_{N-1} - x_1 y_N + x_N y_1]$$



Wyznaczanie powierzchni wielokątów wypukłych

Wielokąt nie będący wypukłym zachowuje analogiczną właściwość.

Wielokąt wklęsły - istnieje taki odcinek, którego końce znajdują się we wnętrzu wielokąta a sam ten odcinek nie zawiera się całkowicie w jego wnętrzu.



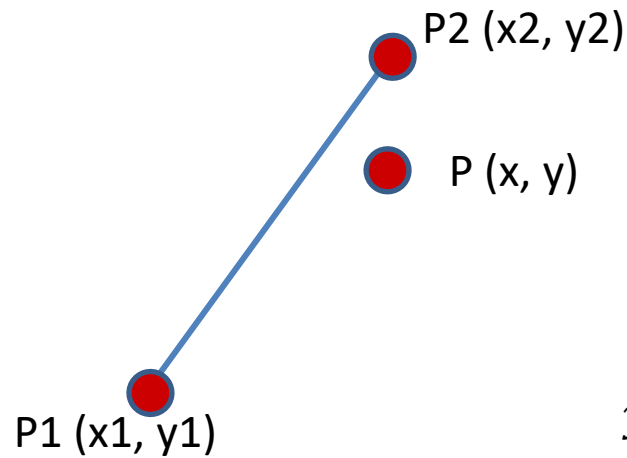
$$P = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \dots + x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1} + x_ny_1 - x_1y_n|$$



Przynależność punktu do ...



Przynależność punktu do odcinka



zadanie

$y = ax + b$ – równanie prostej

Proszę wyznaczyć równanie prostej przechodząca przez dwa punkty:

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 = ax_2 + b$$



$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad b = y_1 - ax_1$$

$$b = y_2 - ax_2$$

$$y_1 = ax_1 + y_2 - ax_2$$

$$y_1 = a(x_1 - x_2) + y_2$$

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$b = y_1 - x_1 \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



Przynależność punktu do odcinka

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 \quad \text{postać kierunkowa}$$

$$y(x_1 - x_2) = (y_1 - y_2)x + y_1(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)x_1$$

$$yx_1 - yx_2 = y_1x - y_2x + y_1x_1 - y_1x_2 - x_1y_1 + x_1y_2 \quad \text{Oraz}$$

$$yx_1 - yx_2 = y_1x - y_2x - y_1x_2 + x_1y_2$$

$$yx_1 - yx_2 - y_1x + y_2x + y_1x_2 - x_1y_2 = 0$$

Lub równanie prostej przechodzącej przez punkty można wyznaczyć ze wzoru

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$$

Oraz

$$\begin{aligned} x &\geq \min(x_1, x_2) \\ x &\leq \max(x_1, x_2) \\ y &\geq \min(y_1, y_2) \\ y &\leq \max(y_1, y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\geq \min(x_1, x_2) \\ x &\leq \max(x_1, x_2) \\ y &\geq \min(y_1, y_2) \\ y &\leq \max(y_1, y_2) \end{aligned}$$



Położenie punktu względem odcinka

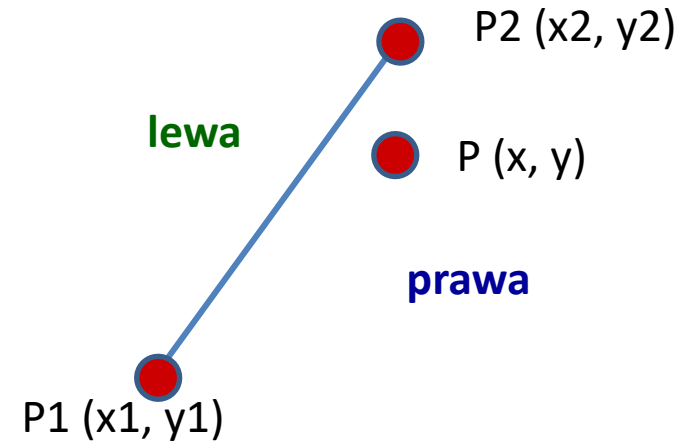
Prosta dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny („strony”).

Jeśli równanie prostej zapisane jest w postaci:

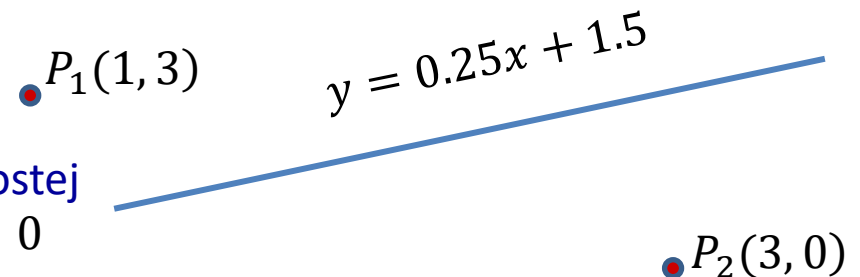
$Ax + By + C = 0$ (**równanie ogólne prostej**)

to punkt zdefiniowany przez współrzędne (x, y) znajduje się:

- z „lewej” strony prostej jeśli **$Ax + By + C < 0$** ,
- z „prawej” strony prostej jeśli **$Ax + By + C > 0$** ,
- „na” prostej jeśli **$Ax + By + C = 0$** .



Zadanie



$y = 0.25x + 1.5 \Rightarrow 0.25x - y + 1.5 = 0$ **równanie ogólne prostej**

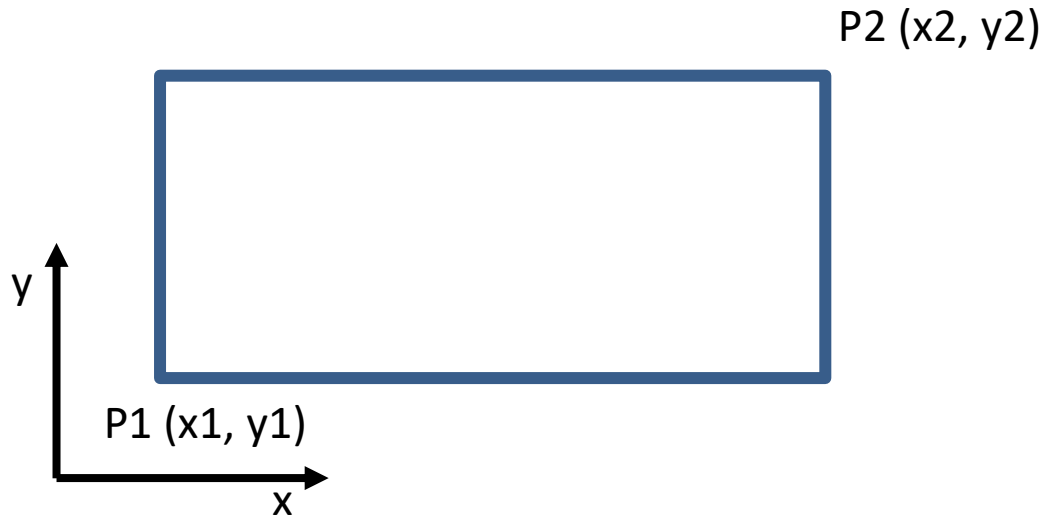
$P_1(1, 3) \Rightarrow 0.25 * 1 - 3 + 1.5 = -1.25 < 0$ („lewa” strona)

$P_2(3, 0) \Rightarrow 0.25 * 3 - 0 + 1.5 = 1.5 > 0$ („prawa” strona)



Przynależność punktu do prostokąta o bokach równoległych do osi układu współrzędnych

1. Należy sprawdzić, czy współrzędna x punktu leży pomiędzy współzrędnymi x wierzchołków prostokąta.
2. Należy sprawdzić, czy współrzędna y punktu leży pomiędzy współzrędnymi y wierzchołków prostokąta.



Punkt $P(x, y)$ należy do wnętrza prostokąta

$$\min(x1, x2) < x < \max(x1, x2), \min(y1, y2) < y < \max(y1, y2)$$

Punkt należy do wnętrza prostokąta, lub leży na jego obwodzie

$$\min(x1, x2) \leq x \leq \max(x1, x2), \min(y1, y2) \leq y \leq \max(y1, y2)$$



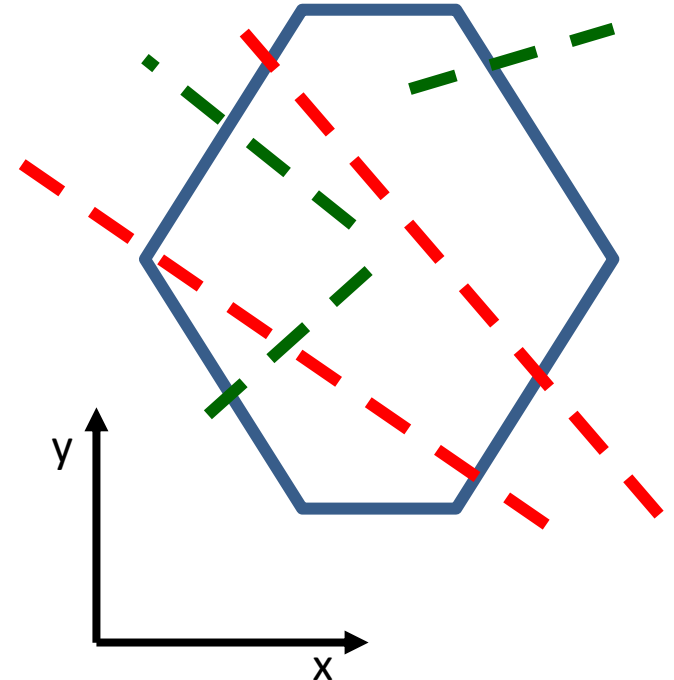
Przynależność punktu do wielokąta



Dowolna półprosta o początku w punkcie należącym do wnętrza wielokąta przecina jego obwód nieparzystą liczbę razy.

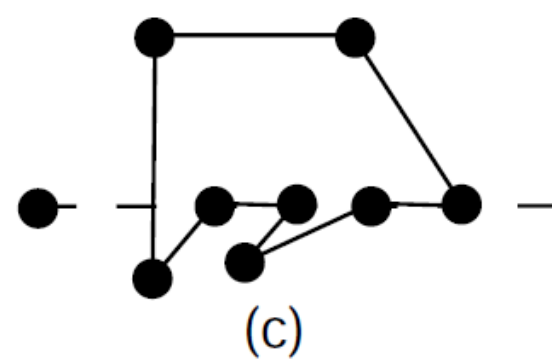
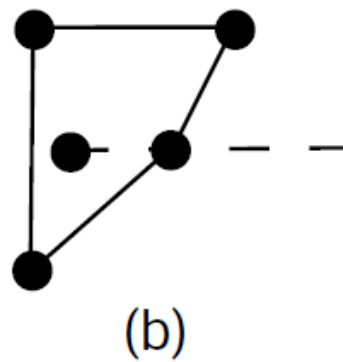
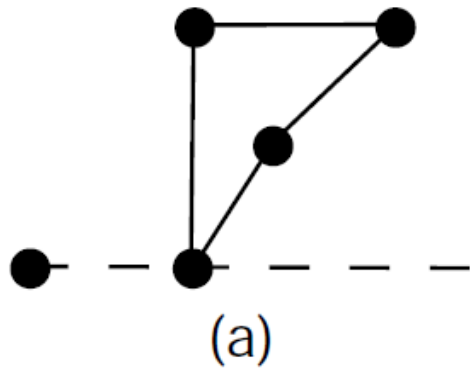
Dowolna półprosta o początku w punkcie NIE należącym do wnętrza wielokąta przecina jego obwód parzystą liczbę razy.

Aby sprawdzić przynależność punktu do wielokąta, można sprawdzić, z iloma bokami wielokąta przecina się dowolna półprosta o początku w tym punkcie.





Problemy z wierzchołkami





Punkt przecięcia prostej z ...



Punkt przecięcia dwóch prostych – metoda wyznaczników

Gdy proste k i l nie są równoległe, to przecinają się one w pewnym punkcie P .

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$$

Ogólne równania obu prostych

Rozwiązanie układu równań metodą wyznaczników polega na policzeniu trzech wyznaczników i zastosowaniu dwóch wzorów!

W tej metodzie oba równania muszą być zapisane w postaci $Ax + By = C$.

$$W = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

$$W_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

$$W_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}$$

wzory Cramera

$$x = \frac{W_x}{W}$$

$$y = \frac{W_y}{W}$$

x i y są współrzędnymi punktu P przecięcia się prostych





$$6x + 2y = 1$$

Zadanie

$$2x + 4y = 2$$

$$W = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 20$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 10$$

$$x = \frac{W_x}{W} = 0 / 20 = 0$$

$$y = \frac{W_y}{W} = 10 / 20 = 0.5$$

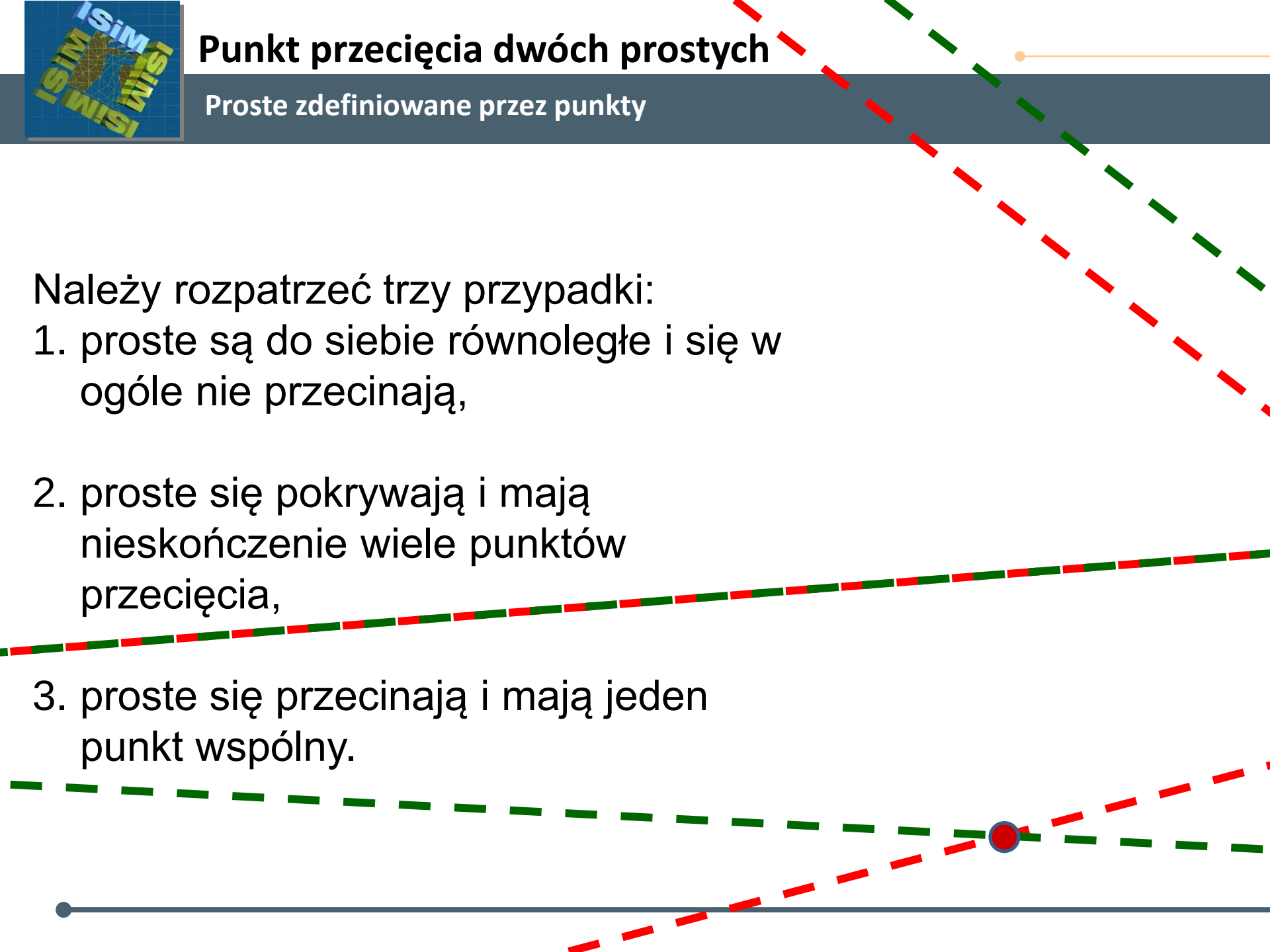


Punkt przecięcia dwóch prostych

Proste zdefiniowane przez punkty

Należy rozpatrzyć trzy przypadki:

1. proste są do siebie równoległe i się w ogóle nie przecinają,
2. proste się pokrywają i mają nieskończenie wiele punktów przecięcia,
3. proste się przecinają i mają jeden punkt wspólny.





1. proste są do siebie równoległe i się w ogóle nie przecinają,

Prosta l przechodzi przez punkty P1, P2

Prosta k przechodzi przez punkty P3, P4

Jeżeli iloczyn wektorowy P1P2 i P3P4 jest równy 0 to proste są równoległe.

$$P1P2 \times P3P4 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_3 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_4 - y_3) - (x_4 - x_3)(y_2 - y_1) = 0$$

Lub z wyznaczników:

$$W = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$W_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$W_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} \neq 0$$



1. proste się pokrywają i mają nieskończenie wiele punktów przecięcia,

Prosta l przechodzi przez punkty P1, P2

Prosta k przechodzi przez punkty P3, P4

Jeżeli iloczyn wektorowy P1P2 i P3P4 jest równy 0 to proste są równoległe.

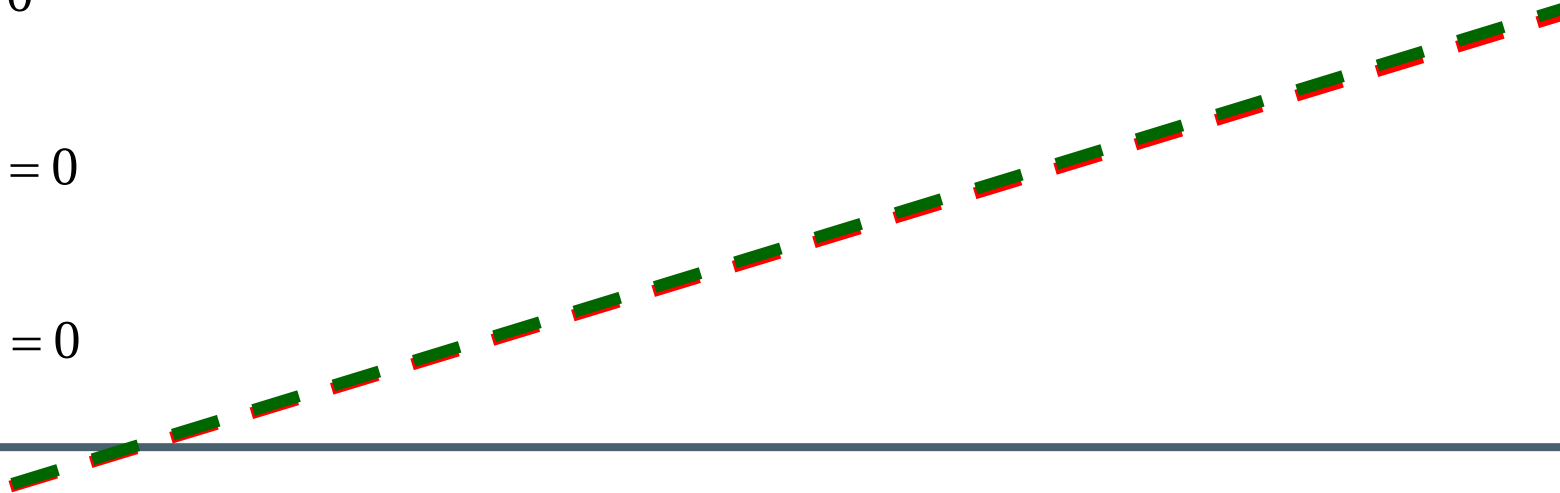
Dodatkowo jeżeli punkt P3 należy do prostej l to proste się pokrywają.

Lub z wyznaczników:

$$W = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$W_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$W_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} = 0$$





Punkt przecięcia dwóch prostych – układ równań parametrycznych

1. proste się przecinają i mają jeden punkt wspólny.

dowolny punkt $P(x, y)$ należący do prostej l można wyrazić w postaci

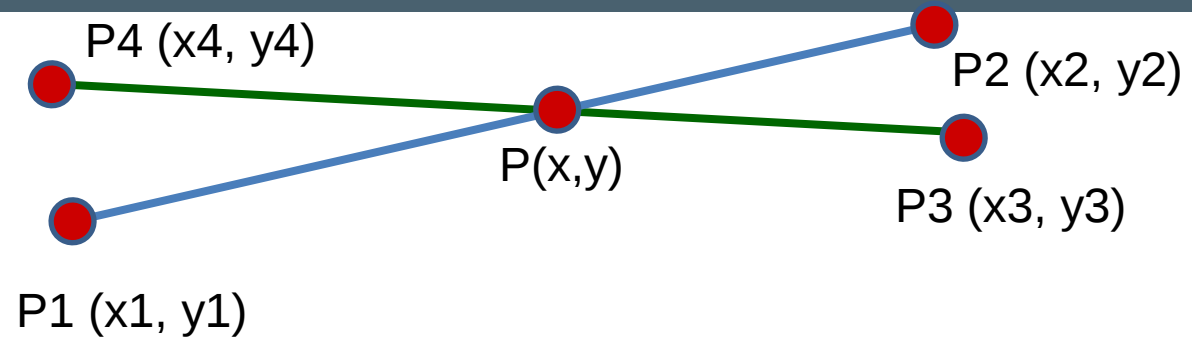
$$\left(\overset{x}{bx_1 + (1-b)x_2}, \overset{y}{by_1 + (1-b)y_2} \right)$$

dla pewnej rzeczywistej liczby b .

$$\begin{cases} x = bx_1 + (1-b)x_2 \\ y = by_1 + (1-b)y_2 \end{cases}$$

Ponieważ punkt należy do obu prostych to można zapisać układ równań:

$$\begin{cases} x = bx_1 + (1-b)x_2 \\ y = by_1 + (1-b)y_2 \\ x = bx_3 + (1-b)x_4 \\ y = by_3 + (1-b)y_4 \end{cases}$$



$$x = \frac{x_2 (x_3 y_4 - x_4 y_3 + (x_4 - x_3) y_1) + x_1 (x_4 y_3 - x_3 y_4 + (x_3 - x_4) y_2)}{(x_1 - x_2)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_1 - y_2)}$$

$$y = \frac{y_2 (x_3 y_4 - x_4 y_3) + y_1 (x_4 y_3 - x_3 y_4) + x_2 y_1 (y_4 - y_3) + x_1 y_2 (y_3 - y_4)}{(x_1 - x_2)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_1 - y_2)}$$



Punkt przecięcia prostej z okręgiem

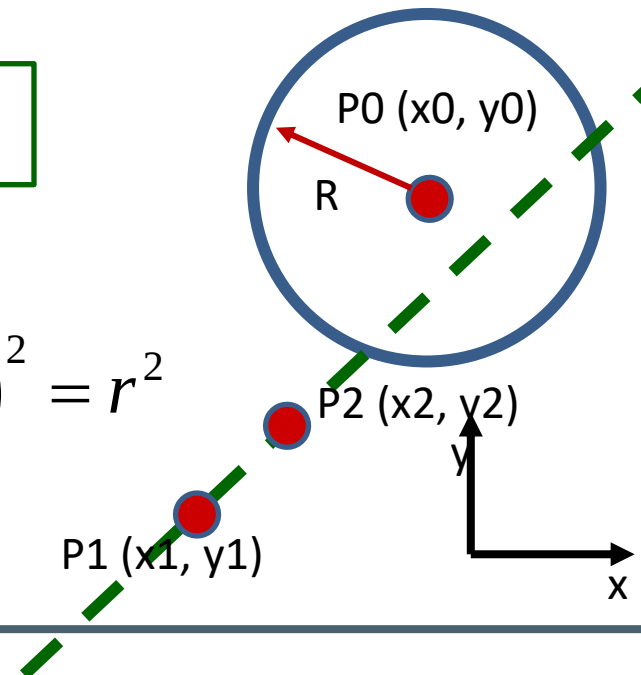
Punkt przecięcia między okręgiem o środku w punkcie P_0 i promieniu r oraz prostej przechodzącej przez dwa punkty P_1 oraz P_2 określany jest poprzez układ równań:

$$\begin{cases} x = ex_1 + (1-e)x_2 \\ y = ey_1 + (1-e)y_2 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$$



$$(ex_1 + (1-e)x_2 - x_0)^2 + (ey_1 + (1-e)y_2 - y_0)^2 = r^2$$

... i po wielu wielu przekształceniach....





$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)$$

$$b = 2(x_0(x_2 - x_1) + y_0(y_2 - y_1) + x_1x_2 + y_1y_2 - x_2^2 - y_2^2)$$

$$c = -r^2 + x_2^2 + y_2^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2(x_0x_2 + y_0y_2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$ Dwa punkty przecięcia

$\Delta = 0$ Jeden punkt przecięcia

$\Delta < 0$ Brak punktów przecięcia



$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0$$

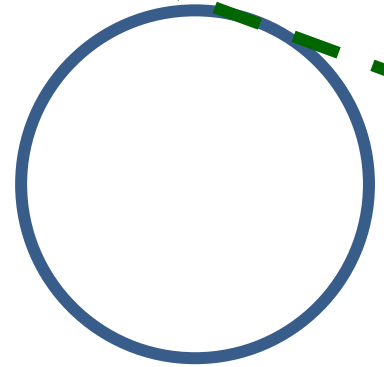
$$\Delta = 0$$

$$\Delta < 0$$



$$e = \frac{-b}{2a}$$

$$(ex_1 + (1-e)x_2; ey_1 + (1-e)y_2)$$





$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \quad \longrightarrow$$

$$e1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$$

$$\Delta = 0$$

$$e2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

$$\Delta < 0$$

$$(e1x_1 + (1-e1)x_2; e1y_1 + (1-e1)y_2)$$

$$(e2x_1 + (1-e2)x_2; e2y_1 + (1-e2)y_2)$$

