Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Formy kwadratowe.

19.01.2022

Rozważmy rzeczywistą macierz symetryczną $A = [a_{ij}]$ stopnia n.

Definicja

Funkcję $F(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = [x_1, \ldots, x_n] A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

*nazywamy **formą kwadratową**. Macierz symetryczną A nazywamy macierzą formy kwadratowej F.*

$F(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Określoność formy kwadratowej

Formę kwadratową $F(x_1, \ldots, x_n) = x^T Ax$ nazywamy

- dodatnio określoną jeśli $F(x_1, \ldots, x_n) > 0$ dla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- ujemnie określoną jeśli $F(x_1, \ldots, x_n) < 0$ dla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- dodatnio półokreśloną jeśli $F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$;
- ujemnie półokreśloną jeśli $F(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$;
- nieokreśloną, jeśli nie zachodzi żaden z poprzednich warunków.

Kryterium wartości własnych

Niech $\lambda_i(A)$ $(i = 1, \ldots, m \leqslant n)$ - wartości własne macierzy A. Wówczas:

- forma dodatnio określoną (tzn. $F(x_1, \ldots, x_n) > 0$) $\iff$ $\lambda_i(A) > 0$;
- forma ujemnie określoną (tzn. $F(x_1, \ldots, x_n) < 0$) $\iff$ $\lambda_i(A) < 0$;
- forma dodatnio półokreśloną (tzn. $F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$) $\iff$ $\lambda_i(A) \geqslant 0$;
- forma ujemnie półokreśloną (tzn. $F(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$) $\iff$ $\lambda_i(A) \leqslant 0$;
- forma nieokreśloną, jeśli nie zachodzi żaden z poprzednich warunków.

Przykład. CD.

$F(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[A - \lambda E] = 0$$

$$\det[A - \lambda E] = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda + 4 = 0$$

Forma nieokreślona (dlaczego?)

Wykład XIII. Przykład. CD.

$$\det[A - \lambda E] = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda + 4 = 0$$

Forma nieokreślona (dlaczego?)

Kryterium Sylvestera

Forma kwadratowa $F(x_1,\ldots,x_n)$ z macierzą $A=[a_{ij}]$ jest dodatnio określoną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące macierzy A są dodatnie, tzn:

$$a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\ldots,|A|>0.$$

Kryterium Sylvestera, CD

Forma kwadratowa $F(x_1, \ldots, x_n)$ z macierzą $A = [a_{ij}]$ jest ujemnie określoną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące macierzy A [redacted] parzystego stopnia są dodatnie, a nieparzystego – ujemne. tzn:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots, |A| > 0 \Leftarrow n - \textit{liczba parzysta}$$

$$|A| < 0 \Leftarrow n - \textit{liczba nieparzysta}.$$

Wykład XIII. Przykład. CD.

Forma kwadratowa $F(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = -1 < 0 \;\Rightarrow$ NIE JEST DODATNIO OKREŚLONĄ!

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \;\Rightarrow$ NIE JEST UJEMNIE OKREŚLONĄ!

Zostało do wyboru: forma dodatnio półokreśloną?; forma ujemnie półokreśloną?; forma nieokreślona? LICZYMY WYZNACZNIK A!

Wykład XIV. Przykład. CD.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow \text{ NIE JEST dodatnio/ujemnie półokreśloną!}$$

Zostaje : forma kwadratowa $F(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$ jest formą nieokreśloną.

Twierdzenie Ważne.

Dla każdej formy kwadratowej

$$F(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n]A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T AX, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

istnieje nieosobliwe przekształcenie liniowe $X = PY$*, dla którego forma kwadratowa* $F = X^T AX = Y^T P^T APY$ *przyjmue postać kanoniczną*

$$Y^T P^T APY = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_n y_n^2$$

Wykład XIII. Dlaczego tak?

- macierz symetryczna A zawsze będzie macierzą diagonalizowalną;
- dla macierzy diagonalizawalnej A istnieje odwracalna macierz P (patrz Wykład XI) taka że macierz $P^{-1}AP$ jest macierzą diagonalną, tzn

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

- dla macierzy symetrycznej, macierz P może być wybraną w taki sposób że $P^{-1} = P^T$;
- ostatecznie

$$Y^T P^T APY = [y_1, \dots, y_n] \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \dots + c_n y_n^2$$

Metoda Lagrange'a

$$F(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 ? \Rightarrow ? c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + \ldots + c_ny_n^2.$$

$$-x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 = -(x_1^2 - 2x_1x_2) + x_2^2 - 4x_2x_3 =$$

$$= -(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + x_2^2 - 4x_2x_3 = -(x_1 - x_2)^2 + 2(x_2^2 - 2x_2x_3) =$$

$$-(x_1 - x_2)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2 = -(x_1 - x_2)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2 =$$

$$-y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2, \quad y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_2 - x_3, \quad y_3 = x_3.$$

Przykład.

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + x_2^2 + 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2x_3 - 4x_3^2 =$$

$$(\overbrace{x_1 + x_2 + 2x_3}^{y_1})^2 - 4(\underbrace{\frac{1}{4}x_2 + x_3}_{y_2})^2 + \frac{1}{4}\underbrace{x_2}_{y_3}^2 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4(\frac{1}{4}x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}x_2^2 =$$

$$y_1^2 - 4y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2, \quad y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \quad y_2 = \frac{1}{4}x_2 + x_3, \quad y_3 = x_2.$$

Przykład.

$4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3 = ???$

$$4(x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 =$$

$$4\Big[\big(\underbrace{x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3}_{y_1}\big)^2 - \tfrac{1}{4}x_2^2 - \tfrac{1}{4}x_3^2 + \tfrac{1}{2}x_2x_3\Big] + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3$$

$$= 4y_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 =$$

$$= 4y_1^2 - x_2x_3 = 4y_1^2 + \tfrac{1}{4}\big(\underbrace{x_2 - x_3}_{y_2}\big)^2 - \tfrac{1}{4}\big(\underbrace{x_2 + x_3}_{y_3}\big)^2$$

Q&A

Dziękuję za Uwagę!