Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Przestrzenie Euklidesowe

12.01.2022

Wykład XII. Przestrzenie liniowe. Przypomnienie

Definicja przestreni liniowej

Niepusty zbiór V nazywamy rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią liniową jeżeli:

- *dla dowolnych elementów* $f, g \in V$ *jest oikreślona ich suma* $f + g \in V$;
- $f + g = g + f$ *- przemienność dodawania;*
- $(f + g) + z = f + (g + z)$ *- łączność dodawania;*
- *istnieje element neutralny* $0 \in V$ *taki że* $f + 0 = f, \ \forall f \in V$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$, $\forall f \in V$ *określony jest iloczyn* $\alpha \cdot f \in V$;
- *dla każdego* $f \in V$, $\exists$ *element przeciwny* $-f \in V$ *taki że* $f + (-f) = 0$;
- $1 \cdot f = f, \ \alpha(\beta \cdot f) = (\alpha\beta) \cdot f$;
- $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f, \ \alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$.

XII. Przestrzenie liniowe. Przypomnienie

Przykłady

- $W_n[x]$ - zbiór wszystkich wielomianów stopnia $\leqslant n$;
- $W[a,b]$ - zbiór wszystkich wielomianów na $[a,b]$;
- $W_n[a,b]$ - zbiór wszystkich wielomianów stopnia $\leqslant n$ na $[a,b]$;
- $C[a,b]$- zbiór wszystkich funkcji ciągłych na $[a,b]$;
- $M_{n\times m}$ - zbiór macierzy wymiaru $n \times m$;
- $\mathbb{R}^n = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$;
- $\mathbb{C}^n = \{\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \ : \ z_i \in \mathbb{C}\}$.

Czego jeszcze brakuje?

Definicja

Niepusty V - przestrzeń liniowa rzeczywistą (zespoloną). Iloczynem skalarnym w przestrzeni V nazywamy funkcje (f, g), $f, g \in V$ która spełnia warunki:

- $(f, g) = (g, f)$, $\quad (f, g) = \overline{(g, f)}$;
- $(f + \gamma, g) = (f, g) + (f, \gamma)$;
- $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$;
- $(f, f) \geqslant 0$;
- $(f, f) = 0 \iff f = 0$;

XII. Przykłady iloczynow skalarnych.

Definicja przestrzeni Euklidesowej

Przestrzeń liniowa rzeczywista V z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot)$ nazywamy przestrzenią Euklidesową.

Definicja przestrzeni unitarnej

Przestrzeń liniowa zespolona V z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot)$ nazywamy przestrzenią unitarną.

Norma.

Niech V - przestrzeń liniowa. Funkcję $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ spełniającą warunki:

- $\|f\| \geqslant 0, \quad \|f\| = 0 \iff f = 0;$
- $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|;$
- $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$

nazywamy normą.

Uwaga.

Parę $(V, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią unormowaną.

Norma vs iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny $\rightarrow$ *norma*

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}.$$

Właściwość charakterystyczna

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2[\|f\|^2 + \|g\|^2].$$

Nierówność Schwarza

$$|(f,g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.$$

Nie każda norma jest określona przez iloczyn skalarny!

$$V = C[0,1], \qquad \|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Ortogonalność wektorów.

Wektory $f, g \in V$ są ortogonalne jeśli

$$(f, g) = 0.$$

Twierdzenie Pitagorasa.

Dla ortogonalnych wektorow $f, g \in V$ mamy

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Odległość między punktami (wektorami)

kąt między wektorami?

Z nierówności Schwarza dla niezerowych wektorów f, g przestrzeni rzeczywistej V:

$$-1 \leqslant \frac{(f,g)}{\|f\|\|g\|} \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha(f,g) := \frac{(f,g)}{\|f\|\|g\|}$$

$\alpha(f,g)$ - kąt między wektorami f i g.

$$\alpha(f,g) \in [0,\pi].$$

Definicja

Zbiór wektorów $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *nazywamy* ***bazą ortonormalną*** *przestrzeni liniowej* V *jeżeli:*

- *wektory* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *tworzą bazę przestrzeni* V*;*
- $$(f_n, f_m) = 0, \quad n \neq m, \qquad (f_n, f_n) = 1.$$

Dla bazy wiemy że $f = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$

ale jak znaleźć współrzędne c_i?

Współrzędne wektora f dla bazy ortonormalnej?

$$f = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n, \quad \Longrightarrow \quad (f, f_1) = c_1(f_1, f_1) + \ldots + c_n(f_n, f_1) = c_1$$

Współrzędne Fouriera, $c_i = (f, f_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Baza $g_1, \ldots, g_n$ przestrzeni V
Ortogonalizacja Grama-Schmidta
Baza ortonormalna $f_1, \ldots, f_n$
Jak robimy?

$$g_1 \longrightarrow f_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$$

$$g_2 \longrightarrow h_2 = g_2 - (g_2, f_1)f_1 \;\longrightarrow\; f_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}$$

$$g_3 \longrightarrow h_3 = g_3 - (g_3, f_1)f_1 - (g_3, f_2)f_2 \;\longrightarrow\; f_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|}$$

Definicja

Niech $f_1, f_2, \ldots f_m$ układ wektorow z V. Macierzą Grama nazywamy macierz kwadratową stopnia m

$$MG[f_1, \ldots, f_m] = \begin{bmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \ldots & (f_1, f_m) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \ldots & (f_2, f_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_m, f_1) & (f_m, f_2) & \ldots & (f_m, f_m) \end{bmatrix}$$

Wyznacznik Grama:

$$G[f_1, \ldots, f_m] = \det MG[f_1, \ldots, f_m].$$

Twierdzenie 1.

Wektory $f_1, f_2, \dots f_m$ liniowo niezależne $\iff$

$$G[f_1, \dots, f_m] \neq 0.$$

Definicja podprestrzeni liniowej. Przypomnienie.

Niech V - przestrzeń liniowa. Niepusty zbiór $W \subset V$ nazywamy podprzestrzenią liniową przestrzeni V jeśli spełnione są warunki

- $f, g \in W \implies f + g \in W$;
- $\forall \alpha, \ \forall f \in W \implies \alpha \cdot f \in W$.

Odległość wektora $h \in V$ od podprestrzeni W.

$$\delta(h, W) := min_{g \in W} \|h - g\|$$

Twierdzenie 2.

Niech $f_1, f_2, \ldots f_m$ jest bazą podprzestrzeni $W \subset V$. Wówczas:

$$\delta(h, W) = min_{g \in W} \|h - g\| = \frac{G[h, f_1, \ldots f_m]}{G[f_1, \ldots f_m]}.$$

Przyklad.

$V = \mathbb{R}^3$, $f_1 = (-2, 0, 1)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ - baza podprzestrzeni $W \subset \mathbb{R}^3$, wektor $h = (-3, -2, 1)$. Znaleźć $\delta(h, W)$?

Wykład XII. Przykład. CD.

Wykład XIII. Rzut prostopadły na podprestrzeń liniową V.

Definicja

Wektor $\gamma \in W$ nazywamy rzutem ortogonalnym wektora h na podprzestrzeń W, jeżeli $h - \gamma \perp W$.

Twierdzenie 3.

Niech $h \in V$, a wektor $\gamma \in W$ jest rzutem ortogonalnym wektora h na podprzestrzeń W. Wówczas,

$$\|h - \gamma\| = \delta(h, W) = min_{g \in W} \|h - g\|$$

Niech W jest podprzestrzenią przestrzeni V, oraz, niech $f_1, f_2, \ldots, f_m$ - baza ortonormalna W.

Niech $h \in V$. Znaleźć rzut ortogonalny γ wektora h na podprzestrzeń W

$$\gamma = (h, f_1)f_1 + (h, f_2)f_2 + \ldots + (h, f_m)f_m$$

Wystarczy dla f_i:

$$(h - \gamma, f_1) = (h, f_1) - (\gamma, f_1) = (h, f_1) - (h, f_1)(f_1, f_1) = (h, f_1) - (h, f_1) = 0.$$

$$(h - \gamma, f_2) = 0$$

$$(h - \gamma, f_m) = 0$$

Wykład XIII. Podprzestrzenie ortogonalne.

Definicja

Podprzestrzeni W_1, W_2 przestrzeni V. Podprzestrzeni W_1 i W_2 są ortogonalne jeśli

$$(f,g)=0, \quad \text{dla każdego} \quad f\in W_1 \quad \text{dla każdego} \quad g\in W_2.$$

$$V=W\oplus W^{\perp}, \quad W^{\perp}=\{g\in V,\ g\perp W\}.$$

Wykład XIII. Podprzestrzenie ortogonalne.

Q&A

Dziękuję za Uwagę!