Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Diagonalizowalność i postać Jordana macierzy

22.12.2021

Macierz diagonalizowalna. Przypomnienie.

Macierz kwadratową A stopnia n nazywamy diagonalizowalną w $\mathbb{R}^n$ (w $\mathbb{C}^n$) jeżeli istnieje odwracalna macierz P taka że macierz

$$P^{-1}AP.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

jest macierzą diagonalną.

Uwaga: A diagonalizowalna w $\mathbb{R}^n \implies A$ diagonalizowalna w $\mathbb{C}^n$.

$$\not\Longleftarrow$$

Wykład XI.

Wartości własne macierzy. Przypomnienie.

Wartością własną macierzy kwadratowej A stopnia n nazywamy liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) *dla której istnieje niezerowy wektor* $f = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ ($f \in \mathbb{C}^n$) *spełniający warunek:*

w.w w.w.

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 1.

λ - wartość własna macierzy $A \iff \det[A - \lambda E] = 0$ (tzn., λ - pierwiastek wielomianu charakterystycznego $\det[A - \lambda E]$).

$K_g(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda I)$

$\ker(A - \lambda E) \subset \mathbb{R}^n$ λ f_1 $f_2 \cdots f_k$ $Af_k = \lambda f_k$

Krotność geometryczna $k_g(\lambda)$ wartości własnej macierzy A.

$$k_g(\lambda) = n - \mathrm{rz}\,[A - \lambda E].$$

Krotność algebraiczna $k_a(\lambda)$ wartości własnej macierzy A.

Krotność algebraiczna $k_a(\lambda)$ jest równa krotności algebraicznej λ jak pierwiastka wielomianu charakterystycznego $\det[A_L - \lambda E]$.

Dla wartości własnej λ. Zawsze!

$$1 \leqslant k_g(\lambda) \leqslant k_a(\lambda) \leqslant n$$

Twierdzenie 1.

Następujące warunki są równoważne':

- macierz A diagonalizowalna w $\mathbb{R}^n$ (w $\mathbb{C}^n$);
- wektory własne macierzy A tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$);
- macierz A ma $m \leqslant n$ wartości własnych $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ takich że

$$k_g(\lambda_1) + k_g(\lambda_2) + \ldots + k_g(\lambda_m) = n.$$

Twierdzenie 2.

Macierz A diagonalizowalna w $\mathbb{C}^n$ $\iff$ macierz A ma $m \leqslant n$ wartości własnych $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ takich że

$$k_g(\lambda_1) = k_a(\lambda_1), \quad k_g(\lambda_2) = k_a(\lambda_2), \ldots, \quad k_g(\lambda_m) = k_a(\lambda_m).$$

Diagonalizowalność macierzy $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ w $\mathbb{R}^3$ (w $\mathbb{C}^3$)?

Wartości własne?

$\lambda=1$ $\quad$ 1, 2

$$\det[A - \lambda E] = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 0 & 6 \\ 2 & 1 - \lambda & 4 \\ -1 & 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

Pierwiastki $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$.

Krotności algebraiczne?

$$\det[A - \lambda E] = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = -(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)$$

$$\Longrightarrow \qquad k_a(1) = 2, \qquad k_a(2) = 1.$$

Krotności geometryczne?

$\lambda = 1$

teoria : $\underline{1 \leqslant k_g(\lambda) \leqslant \overset{1}{k_a(\lambda)} \leqslant n}$ $\quad \underline{k_g(\lambda) = n - \text{rz}\,[A - \lambda E]}$

$$\Longrightarrow \quad \underline{k_g(2) = 1}, \quad k_g(1) = 3 - \text{rz}\,[A - E] = 3 - \text{rz}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3 - \underline{1} = 2.$$

Wniosek

Macierz A diagonalizowalna w $\mathbb{R}^3$ ponieważ $k_g(1) + k_g(2) = 2 + 1 = 3$
$\Longrightarrow \quad A \quad$ diagonalizowalna w $\quad \mathbb{C}^3$

$$[A-E]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \iff A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = 1}$

Baza wektorow własnych macierzy A

$$\text{dla} \quad \lambda_1 = 1 \quad \Longrightarrow k_g(1) = 2 \Longrightarrow \text{ 2 wektora bazy.}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 3x + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ -x - 2z = 0 \end{cases}$$

Podprzestrzeń wektorow własnych?

$\ker(A-E) = \{(-2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ lub $\underline{\ker(A-E) = \{(-2z, y, z) : y, z \in \mathbb{C}\}}$

Wektory bazy:

$$g_1 = (-2, 0, 1) \text{ (dla } \underline{y = 0}, \underline{z = 1}\text{)}; \; g_2 = (0, 1, 0) \text{ (dla } y = 1, z = 0\text{)}.$$

Wykład XI. Przykład. CD.

Baza wektorow własnych macierzy A

$$[A-2E]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\text{dla}\quad \lambda_2 = 2 \quad \Longrightarrow k_g(2) = 1 \Longrightarrow \text{ 1 wektor bazy.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2x + 6z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \\ -x - 3z = 0 \end{cases}$$

Podprzestrzeń wektorow własnych?

$\ker(A-2E) = \{(-3z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ lub $\ker(A-2E) = \{(-3z, -2z, z) : z \in \mathbb{C}\}$

Wektor bazy:

$$g_3 = (-3, -2, 1) \quad (\text{dla } z = 1).$$

Wniosek. Baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{C}^3$.)

$$g_1 = (-2, 0, 1), \qquad g_2 = (0, 1, 0), \qquad g_3 = (-3, -2, 1).$$

Wykład XI. Przykład. CD.

Macierz A diagonalizowalna $\Longrightarrow \exists$ macierz odwracalna P że $\qquad P\ ?$

$$B = P^{-1}AP \iff PB = AP \qquad B - ?$$

będzie macierzą diagonalną.

Jak znaleźć P?.

Macierz P jest macierzą przejścia $P = P_{I \to II}$ z bazy standardowej $I = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$

do bazy wektorów własnych $II = \{g_1, g_2, g_3\}$

$$g_1 = (-2,0,1), \qquad g_2 = (0,1,0), \qquad g_3 = (-3,-2,1).$$

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{Dlaczego tak?}$$

Macierz przejścia

Baza standardowa $I = \{e_1, e_2, e_3\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{C}^3$); Baza $II = \{g_1, g_2, g_3\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{C}^3$).

Macierz przejścia $P = P_{I \to II}$ z bazy I do bazy II.

$$
\begin{aligned}
g_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + p_{31}e_3 = (p_{11}, p_{21}, p_{31}) = (-2, 0, 1)\\
g_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + p_{32}e_3 = (p_{12}, p_{22}, p_{32}) = (0, 1, 0) \qquad \Longrightarrow\\
g_3 &= p_{13}e_1 + p_{23}e_2 + p_{33}e_3 = (p_{13}, p_{23}, p_{33}) = (-3, -2, 1)
\end{aligned}
$$

$$
P_{I \to II} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Wykład XI. Przykład. CD.

Macierz A diagonalizowalna $\Longrightarrow$ $\exists$ macierz odwracalna P że $B = P^{-1}AP$ będzie macierzą diagonalną.

Jak znaleźć B?

Twierdzenie: B jest macierzą odwzorowania A w bazie wektorów własnych $\mathcal{U} = \{g_1, g_2, g_3\}$, tzn.

$$\begin{array}{l} Ag_1 = 1g_1 = 1g_1 + 0g_2 + 0g_3 \\ Ag_2 = 1g_2 = 0g_1 + 1g_2 + 0g_3 \\ Ag_3 = 2g_3 = 0g_1 + 0g_2 + 2g_3 \end{array} \Longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wykład XI. Przykład. CD.

Czy to prawda że $B = P^{-1}AP$

$\underline{B = P^{-1}AP} \iff \underline{PB = AP}$

$$PB = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

!

$$AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalizowalność macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ w $\mathbb{R}^3$ (w $\mathbb{C}^3$)?

Wartości własne?

$$\det[A - \lambda E] = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \underbrace{(2-\lambda)^2(1-\lambda)}_{} = 0$$

Pierwiastki $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$

Krotności algebraiczne? $k_a(1) = 1, \quad k_a(2) = 2$

Krotności geometryczne? Teoria: $1 \leqslant k_g(\lambda) \leqslant k_a(\lambda) \leqslant n \Longrightarrow \underline{k_g(1) = 1}$

$\underline{k_g(\lambda) = n - \text{rz}\,[A - \lambda E]} \Longrightarrow$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 \neq 0$

$$k_g(2) = 3 - \text{rz}\,[A - 2E] = 3 - \text{rz} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Wykład XI. Przykład nowy

Wniosek

Macierz A NIE diagonalizowalna w $\mathbb{R}^3$ ponieważ $k_g(1) + k_g(2) = 1 + 1 = 2 \neq 3$

Podprzestrzeń wektorów własnych macierzy A dla $\lambda_1 = 1$ Wiemy, że
$k_g(1) = 1 \implies$ podprzestrzeń wektorów własnych macierzy A ma wymiar 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Podprzestrzeń wektorow własnych

$$\ker(A - E) = \{(-3y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} \quad \text{lub} \quad \ker(A - E) = \{(-3y, y, 0) : y \in \mathbb{C}\}$$

Wektor bazy podprzestrzeni: $g_1 = (-3, 1, 0)$ (dla $y = 1$).

Podprzestrzeń wektorów własnych macierzy A dla $\lambda_2 = 2$ Wiemy, że $k_g(2) = 1 \Longrightarrow$ podprzestrzeń wektorów własnych macierzy A ma wymiar 1.

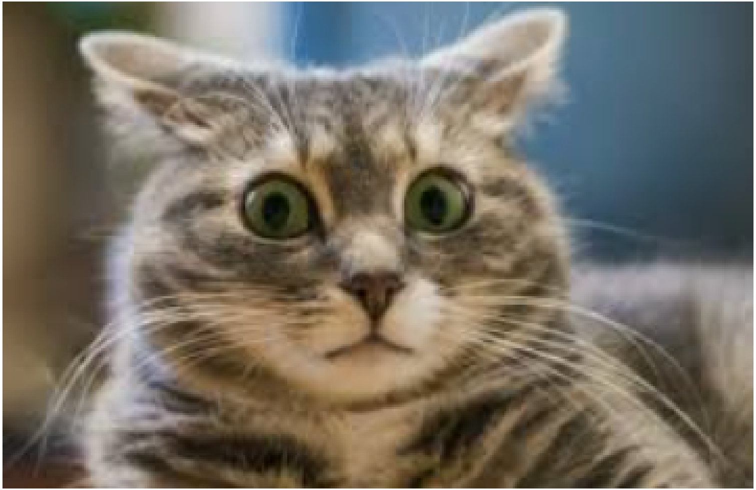
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 3y + z = 0 \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Podprzestrzeń wektorow własnych

$$\ker(A - 2E) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{lub} \quad \ker(A - 2E) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{C}\}$$

Wektor bazy podprzestrzeni: $g_2 = (1, 0, 0)$ (dla $x = 1$).

Wykład XI. Co będziemy robili?



Rysunek: Może macierz Jordana?

Każda macierz Jordana składa się z klatek Jordana

Klatka Jordana $J_k[\lambda]$ jest macierzą kwadratową stopnia k:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad J_2[5], \quad J_2[3]$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad J_3[5], \quad J_1[3]$$

$$J_1[5] \qquad J_1[4] \qquad J_1[3]$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1[5] & 0 & 0 \\ 0 & J_1[4] & 0 \\ 0 & 0 & J_1[3] \end{bmatrix}$$

$(A - \lambda_1 E) g_k = g_{k-1}$

Twierdzenie.

Niech $A = J_k[\lambda_1]$ jest klatką Jordana. Wówczas:

- *dla macierzy A istnieje jedna wartość własna $\lambda = \lambda_1$, z $k_g(\lambda_1) = 1$ i $k_a(\lambda) = k$;*
- *istnieje ciąg wektorów $g_1, g_2, \dots g_k$ (łańcuch Jordana) taki że*

w.w

$$(A - \lambda_1 E) g_k = g_{k-1}, \quad \dots \quad (A - \lambda_1 E) g_2 = g_1, \quad (A - \lambda_1 E) g_1 = 0$$

$$A = J_3[\lambda_1] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det[A - \lambda E] = (\lambda_1 - \lambda)^3 = 0$$

$\Longrightarrow$ wartość własna λ_1.

$K_a(\lambda_1) = 3$

$$[A-\lambda_1 E]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow y = 0,\ z = 0 \Longrightarrow g_1 \in \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow g_1 = (1,0,0).$$

$$[A-\lambda_1 E]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = g_1$$

$$\Longrightarrow y = 1,\ z = 0 \Longrightarrow g_2 \in \{(x,1,0) : x \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow g_2 = (1,1,0)$$

$$[A-\lambda_1 E]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = g_2$$

$$\Longrightarrow y = 1,\ z = 1 \Longrightarrow g_3 \in \{(x,1,1) : x \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow g_3 = (1,1,1)$$

Każda macierz Jordana składa się z klatek Jordana

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$J_3(2)$, $J_2(3)$, $J_1(5)$

w. w. dla B $= \{2, 3, 5\}$

$K_g(2) = 1$
$K_a(2) = 3$

$K_g(3) = 1$
$K_a(3) = 2$

$K_g(5) = 1$
$K_a(5) = 1$

$g_1^2 \; g_2^2 \; g_3^2 \quad g_1^3 \; g_2^3 \quad g_1^5$ ← baza dla m. Jordan

Twierdzenie.

Dla każdej macierzy kwadratowej A stopnia n istnieje odwracalna macierz P taka że macierz

$$B = P^{-1}AP.$$

jest macierzą Jordana.

B – macierz Jordana

Definicja.

Baza $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ przestrzeni $\mathbb{C}^n$ według ktorej macerz B odwzorowania A będzie macierzą Jordana nazywamy ***bazą Jordana***

Twierdzenie.

Niech A macierz kwadratowa stopnia n i niech $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m\}$ $(m \leqslant n)$ - wartości własne macierzy A. Wówczas, dla macierzy Jordana $B = P^{-1}AP$:

- *liczba klatek Jordana*

$$J_{k_1}[\lambda_1], \quad J_{k_2}[\lambda_1], \quad \dots \quad J_{k_r}[\lambda_1]$$

jest równa $r = k_g(\lambda_1)$ (podobnie dla $\lambda_2, \dots$).

- $$k_1 + k_2 + \dots + k_{k_g(\lambda_1)} = k_a(\lambda_1).$$

$J_{k_1}[\lambda_1]$

$J_{k_2}[\lambda_2]$

$k_1 + k_2 = 4$

$3 + 1 = 4$

$2 + 2 = 4$

A ma w. w. λ_1, $k_g(\lambda_1) = 2$ $k_a(\lambda_1) = 4$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \neq B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Wartości własne: $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2.$

Krotności: $k_a(1) = 1, \quad k_g(1) = 1 \qquad k_a(2) = 2, \quad k_g(2) = 1 \Longrightarrow$

$$B = \begin{bmatrix} J_1[1] & 0 \\ 0 & J_2[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Łańcuch Jordana dla $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Podprzestrzeń wektorow własnych

$$\ker(A - E) = \{(-3y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} \quad \text{lub} \quad \ker(A - E) = \{(-3y, y, 0) : y \in \mathbb{C}\}$$

Wektor bazy podprzestrzeni: $g_1^{(1)} = (-3, 1, 0)$ (dla $y = 1$).

Łańcuch Jordana dla $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 3y + z = 0 \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Podprzestrzeń wektorow własnych

$$\ker(A - 2E) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{lub} \quad \ker(A - 2E) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{C}\}$$

Wektor bazy podprzestrzeni: $g_1^{(2)} = (1, 0, 0)$ (dla $x = 1$).

$g_1^2 = (1, 0\ 0)$

Łańcuch Jordana dla $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 3y + z = 1 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y = z,\ 4y = 1 \Longrightarrow g_2^{(2)} \in \{(x, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}) : x \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow g_2^{(2)} = (1, 1/4, 1/4)$$

Baza Jordana

$$g_1^{(1)} = (-3, 1, 0), \quad g_1^{(2)} = (1, 0, 0), \quad g_2^{(2)} = (1, 1/4, 1/4).$$

Wykład XI. Przykład nowy. CD. Baza Jordana?

Macierz B jest macierzą odwzorowania $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ w bazie Jordana $\mathcal{U} = \{g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)}\}$, tzn.

$$\begin{aligned} Ag_1^{(1)} &= 1g_1^{(1)} = 1g_1^{(1)} + 0g_1^{(2)} + 0g_2^{(2)} \\ Ag_1^{(2)} &= 2g_1^{(2)} = 0g_1^{(1)} + 2g_1^{(2)} + 0g_2^{(2)} \\ Ag_2^{(2)} &= 0g_1^{(1)} + 1g_1^{(2)} + 2g_2^{(2)} \end{aligned} \Longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz przejścia P w $B = P^{-1}AP$.

Baza standardowa $I = \{e_1, e_2, e_3\}$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$; Baza Jordana $II = \{g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)}\}$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$.

Macierz przejścia $P = P_{I \to II}$ z bazy I do bazy II.

$$
\begin{aligned}
g_1^{(1)} &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + p_{31}e_3 = (p_{11}, p_{21}, p_{31}) = (-3, 1, 0) \\
g_1^{(2)} &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + p_{32}e_3 = (p_{12}, p_{22}, p_{32}) = (1, 0, 0) \qquad \Longrightarrow \\
g_2^{(2)} &= p_{13}e_1 + p_{23}e_2 + p_{33}e_3 = (p_{13}, p_{23}, p_{33}) = (1, 1/4, 1/4)
\end{aligned}
$$

$$
P_{I \to II} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}
$$

Wykład XI. Przykład nowy. CD.

Czy to prawda że $B = P^{-1}AP$

$B = P^{-1}AP \iff PB = AP$

$$PB = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Q&A

Wesołych Świąt!