Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Macierz diagonalizowalna

Wykład X. Wartości własne. Przypomnienie.

Niech $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (lub $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$) - przekształcenie liniowe.

Wartością własną przekształcenia liniowego L nazywamy liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) dla której istnieje niezerowy wektor $f \in \mathbb{R}^n$ ($f \in \mathbb{C}^n$) spełniający warunek:

$$L(f) = \lambda f. \tag{1}$$

Zbiór wszystkich wartości własnych $\{\lambda_1, \dots \lambda_m\}$ nazywamy widmem operatora L i oznaczamy $\sigma(L)$.

Twierdzenie 1.

λ - wartość własna operatora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$) $\iff$

$$\det[A_L - \lambda E] = 0$$

(tzn., λ - pierwiastek wielomianu charakterystycznego $\det[A_L - \lambda E]$), gdzie A_L - macierz przekształcenia L.

Wykład X. Wartości własne. Przestrzenie zespolone vs. rzeczywiste.

$\mathbb{R}^n$ - model kanoniczny przestrzeni rzeczywistej wymiaru n;
$\mathbb{C}^n$ - model kanoniczny przestrzeni zespolonej wymiaru n.

Definicja wektorów własnych

Każdy niezerowy wektor $f \in \mathbb{R}^n$ ($f \in \mathbb{C}^n$) spełniający równanie

$$L(f) = \lambda f$$

nazywamy wektorem własnym operatora L odpowiadającym wartości własnej λ.

Definicja podprzestrzeni wektorów własnych

Podprzestrznią liniową

$$\ker(L - \lambda I) = \{f \in \mathbb{R}^n \ : \ L(f) = \lambda f\}, \quad \ker(L - \lambda I) = \{f \in \mathbb{C}^n \ : \ L(f) = \lambda f\}$$

nazywamy podprzestrznią liniową wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ.

Twierdzenie 1.

Niech λ - wartość własna przekształcenia liniowego L;
Niech A_L - macierz przekształcenia liniowego w bazie $f_1, f_2, \ldots f_n$. Wówczas:

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 \ldots + x_n f_n \in \ker(L - \lambda I) \iff$$

[redacted]
$$[A_L - \lambda E] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Krotność geometryczna $k_g(\lambda)$

$$k_g(\lambda) = \dim\ker(L - \lambda I) = \dim\ker(A_L - \lambda E) = n - \mathrm{rz}\,[A_L - \lambda E].$$

Krotność algebraiczna $k_a(\lambda)$

Krotność algebraiczna $k_a(\lambda)$ jest równa krotności algebraicznej λ jak pierwiastka wielomianu charakterystycznego $\det[A_L - \lambda E]$.

Twierdzenie 1.

λ - wartość własna operatora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \iff$

$$\det[A_L - \lambda E] = 0$$

(tzn., λ - pierwiastek wielomianu charakterystycznego $\det[A_L - \lambda E]$).

Twierdzenie 2.

Niech $\lambda \in \sigma(L)$ - wartość własna operatora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Krotność geometryczna $k_g(\lambda)$ to

$$k_g(\lambda) = \dim\ker(L - \lambda I) = n - \mathrm{rz}\,[A_L - \lambda E]$$

Krotność algebraiczna $k_a(\lambda) = \dim\ker(L - \lambda I)^n$ *jest równa krotności algebraicznej λ jak pierwiastka wielomianu charakterystycznego* $\det[A_L - \lambda E]$.

Dla wartości własnej λ. Zawsze!

$$1 \leqslant k_g(\lambda) \leqslant k_a(\lambda) \leqslant n$$

Przykład trywialny. $L(x, y, z) = (x, y, z)$.

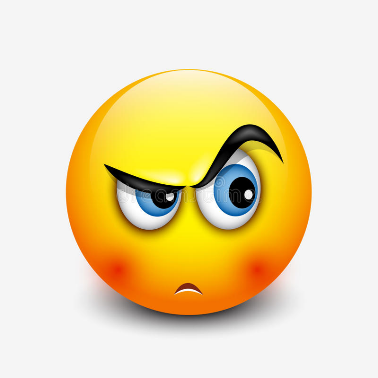
Macierz A_L w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ to

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow [A_L - \lambda E] = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det[A_L - \lambda E] = (1-\lambda)^3 = 0 \Longrightarrow \sigma(L) = \{1\}, \quad k_a(1) = 3$$

$$k_g(1) = 3 - \text{rz}\ [A_L - E] = 3 - \text{rz}\ [\text{macierz zerowa}] = 3 - 0 = 3.$$

Wykład X.



Rysunek: Dlaczego rozpatrujemy osobno przestrzeni zespolone/rzeczywiste?

$L(x,y) = (x+y, y-x)$.

Macierz przekształcenia w basie standardowej: e_1 e_2

$$L(1,0) = (1,-1) = 1e_1 - 1e_2; \qquad L(0,1) = (1,1) = 1e_1 + 1e_2 \Longrightarrow$$

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det[A_L - \lambda E] \overset{\det}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda-1-i)(\lambda-1+i) = 0$$

$\Longrightarrow$ pierwiastki $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$.

Przestrzeń rzeczywista $\mathbb{R}^2$

$\sigma(L) = \emptyset$

Przestrzeń zespolona $\mathbb{C}^2$

$\sigma(L) = \{1+i, 1-i\}, \quad k_a(1+i) = k_a(1-i) = k_g(1+i) = k_g(1-i) = 1.$

Wykład X. O zmianie macierzy przekształcenia liniowego L przy zmianie baz.

Niech $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (lub $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$);
Niech A_L macierz przekształcenia liniowego L w bazie $f_1, f_2, \dots f_n$;
Niech B_L macierz przekształcenia liniowego L w bazie $g_1, g_2, \dots g_n$.

Związek między A_L i B_L?

Macierz przejścia $P = P_{I \to II}$ z bazy I do bazy II.

Pierwsza baza $I = \{f_1, \dots f_n\}$, *druga baza* $II = \{g_1, \dots g_n\}$

$$\begin{aligned} g_1 &= p_{11} f_1 + p_{21} f_2 + \dots p_{n1} f_n \\ g_2 &= p_{12} f_1 + p_{22} f_2 + \dots p_{n2} f_n \\ &\vdots \\ g_n &= p_{1n} f_1 + p_{2n} f_2 + \dots p_{nn} f_n \end{aligned} \Longrightarrow \quad P_{I \to II} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Wykład X. Macierz przejścia $P = P_{I \to II}$ z bazy I do bazy II

Twierdzenie

Niech $f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n$ oraz ten sam wektor $f = y_1 g_1 + y_2 g_2 + \ldots + y_n g_n$. Wówczas

$P_{I \to II}$

I baza

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

II baza

Twierdzenie

$$\det[P_{I \to II}] \neq 0 \qquad \text{i} \qquad P_{I \to II}^{-1} = P_{II \to I}.$$

Wykład X. O zmianie macierzy przekształcenia liniowego L przy zmianie baz.

Niech $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (lub $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$);
Niech A_L macierz przekształcenia liniowego L w bazie $f_1, f_2, \dots f_n$;
Niech B_L macierz przekształcenia liniowego L w bazie $g_1, g_2, \dots g_n$;
Niech $P = P_{I \to II}$ macierz przejścia z bazy I do bazy II.

Związek między A_L i B_L?

$P = P_{I \to II}$

$$\boxed{B_L = P_{I \to II}^{-1} A_L P_{I \to II} = P^{-1} A_L P.}$$

Wykład X. Szkic dowodu.

Macierz diagonalizowalna

Macierz kwadratową A stopnia n nazywamy diagonalizowalną w $\mathbb{R}^n$ (w $\mathbb{C}^n$) jeżeli istnieje odwracalna macierz P taka że macierz

$\det P \neq 0$

$$P^{-1}AP.$$

jest macierzą diagonalną.

Innymi słowy.

Macierz kwadratową A stopnia n - macierz przekształcenia liniowego L działającego w $\mathbb{R}^n$ (lub w $\mathbb{C}^n$). Stąd, diagonalizowalność A w $\mathbb{R}^n$ (w $\mathbb{C}^n$) $\iff$ istnieje baza wektorów własnych operatora L w $\mathbb{R}^n$ (lub w $\mathbb{C}^n$).

Uwaga: A diagonalizowalna w $\mathbb{R}^n \implies A$ diagonalizowalna w $\mathbb{C}^n$.

Twierdzenie 1.

Następujące warunki są równoważne':

- macierz A diagonalizowalna w $\mathbb{R}^n$ (w $\mathbb{C}^n$);
- wektory własne operatora L tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$);
- operator L ma $m \leqslant n$ wartości własnych $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ takich że

$$k_g(\lambda_1) + k_g(\lambda_2) + \ldots + k_g(\lambda_m) = n.$$

- operator L ma $m \leqslant n$ wartości własnych $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ takich że

Twierdzenie 2.

Macierz A diagonalizowalna w $\mathbb{C}^n$ $\iff$ operator L ma $m \leqslant n$ wartości własnych $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ takich że

$$k_g(\lambda_1) = k_a(\lambda_1), \quad k_g(\lambda_2) = k_a(\lambda_2), \ldots, \quad k_g(\lambda_m) = k_a(\lambda_m).$$

Wykład X. Przykład. Ponownie.

$L(x, y) = (x + y, y - x)$.

Macierz przekształcenia w basie standardowej:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ pierwiastki } \lambda_1 = 1 + i, \ \lambda_2 = 1 - i.$$

Przestrzeń rzeczywista $\mathbb{R}^2$

$\sigma(L) = \emptyset$ - macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ nie diagonalizowalna w $\mathbb{R}^2$.

Przestrzeń zespolona $\mathbb{C}^2$

$\sigma(L) = \{1 + i, 1 - i\}, \quad k_a(1 + i) = k_a(1 - i) = k_g(1 + i) = k_g(1 - i) = 1.$
Macierz A diagonalizowalna w $\mathbb{C}^2$.

Diagonalizowalność w $\mathbb{R}^3$?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow [A - \lambda E] = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ -1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$0 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = \det[A - \lambda E]$$

Wartości własne.

$$k_a(2) = 1 \Longrightarrow k_g(2) = 1; \qquad k_a(1) = 2, \quad k_g(1) = ???$$

Wykład X. Przykład. CD.

$$k_g(1) = 3 - \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2. \Longrightarrow \quad A \quad \text{diagonalizowalna w} \quad \mathbb{R}^3.$$

Baza wektorow własnych dla $\lambda = 1$?

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 3x + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ -x - 2z = 0 \end{cases}$$

Podprzestrzeń wektorow własnych? $\ker(A - \lambda E) = \{(-2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Wykład X. Przykład. CD.

$z=1,\ y=0 \quad // \quad z=0,\ y=1$

Baza wektorow własnych dla $\lambda = 1$ $\ker(A-\lambda E) = \{(-2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$
$g_1 = (-2, 0, 1)$; $\qquad g_2 = (0, 1, 0)$. Baza wektorow własnych dla $\lambda = 2$?

$(-2z, y, z) = z g_1 + y g_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2x + 6z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \\ -x - 3z = 0 \end{cases}$$

Podprzestrzeń wektorow własnych $\ker(A-\lambda E) = \{(-3z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ Baza wektorow własnych dla $\lambda = 2$, $g_3 = (-3, -2, 1)$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wykład X. Przykład. CD.

Wykład X. Przykład. CD.

Wykład X. Przykład. CD.

Q&A

Dziękuję za Uwagę!