Przekształcenia liniowe

Wykład VIII. Przestrzenie liniowe. Przypomnienie

Definicja przestreni liniowej

Niepusty zbiór V nazywamy rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią liniową jeżeli:

- *dla dowolnych elementów $f, g \in V$ jest oikreślona ich suma $f + g \in V$;*
- *$f + g = g + f$ - przemienność dodawania;*
- *$(f + g) + z = f + (g + z)$ - łączność dodawania;*
- *istnieje element neutralny $0 \in V$ taki że $f + 0 = f, \ \forall f \in V$;*
- *$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$, $\forall f \in V$ określony jest iloczyn $\alpha \cdot f \in V$;*
- *dla każdego $f \in V$, $\exists$ element przeciwny $-f \in V$ taki że $f + (-f) = 0$;*
- *$1 \cdot f = f, \ \alpha(\beta \cdot f) = (\alpha\beta) \cdot f)$;*
- *$(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f, \ \alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$.*

Przykłady

- $W_n[x]$ - zbiór wszystkich wielomianów stopnia $\leqslant n$;
- $W[a, b]$ - zbiór wszystkich wielomianów na $[a, b]$;
- $W_n[a, b]$ - zbiór wszystkich wielomianów stopnia $\leq n$ na $[a, b]$;
- $C[a, b]$- zbiór wszystkich funkcji ciągłych na $[a, b]$;
- $M_{n\times m}$ - zbiór macierzy wymiaru $n \times m$;
- $\mathbb{R}^n = \{f = (x_1, x_2, \dots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$;
- $\mathbb{C}^n = \{f = (z_1, z_2, \dots, z_n) \ : \ z_i \in \mathbb{C}\}$.

Definicja przekształcenia liniowego.

Niech U, V są przestrzeni liniowe. Mówimy że przekształcenie $L : U \to V$ jest liniowe, jeśli spełnia warunki

- $L(f+g) = L(f) + L(g)$, *dla dowolnych* $f, g \in U$;
- $L(\alpha f) = \alpha L(f)$ *dla dowolnych* $f \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$.

Uwaga

Przekształcenie liniowe $\equiv$ operator liniowy.

Pierwsza pochodna, $L = \frac{d}{dx}$.

sensowny wybór U, tzn. $U = W_n[x]$ lub $U = W[a, b]$ lub $U = W_n[a, b]$ ale czy może być $U = C[a, b]$?

Wybór U i V?

$U = C[a,b]$, $V = \mathbb{R}$

Wybór U i V?

$U = C[a,b]$, $V = C[a,b]$

Wykład VIII. Przykład.

$U = M_{n\times n}$,

$$L(A) = \det A \quad \text{dla} \quad A = M_{n\times n}. \qquad n > 1$$

?

$$L(\alpha A) = \det \alpha A = \alpha^n \det A = \alpha^n L(A)$$

Wykład VIII. Przykład.

$$L(x_1, x_2, x_3) = L(x, y, z) = (x + z, y + z)$$

Wykład VIII. Przykład.

$$L(x, y, z) = (|x|, y)$$

Wykład VIII. Jądro i obraz przekształcenia liniowego L.

Jądro.

Niech U, V są przestrzeni liniowe oraz niech $L : U \to V$ - przekształcenie liniowe. Jądro przekształcenia liniowego:

$$\ker L = \{f \in U \ : \ L(f) = 0\}.$$

Obraz.

Niech U, V są przestrzeni liniowe oraz niech $L : U \to V$ - przekształcenie liniowe. Obraz przekształcenia liniowego:

$$Im\ L = \{g \in V \ : \ \exists f \in U, g = L(f)\} = \{g = L(f) \ : \ \forall f \in U\}.$$

Wykład VIII. Jądro i obraz. Własności.

Jądro operatora liniowego $\ker L$ jest podprzestrzenią liniowa przestrzeni U.

Obraz operatora liniowego $\operatorname{Im} L$ jest podprzestrzenią liniowa przestrzeni V.

Bardzo ważna równość

Niech U, V są przestrzeni liniowe oraz niech $L : U \to V$ - przekształcenie liniowe. Wówczas zachodzi wzór

$$\dim U = \dim \ker\ L + \dim \operatorname{Im}\ L.$$

Wyznaczyć wymiar jądra i obrazu przekształcenia liniowego, $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

$$L(x, y, z) = (x - 3y + 2z, -2x + 6y - 4z)$$

$$3 = \dim \ker\ L + \dim \operatorname{Im}\ L. \Longrightarrow \text{szukamy} \quad \dim \ker\ L$$

$$L(x, y, z) = 0 \Longrightarrow (x - 3y + 2z, -2x + 6y - 4z) = (0, 0)$$

Wyznaczyć wymiar jądra i obrazu przekształcenia liniowego, $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Układ równań liniowych

$2w_1 + w_2 \to w_2$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + 6y - 4z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + 6y - 4z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\ker L = \{f = (3y - 2z, y, z) \ : \ \forall y, z \in \mathbb{R}\} - \quad \text{podprzestrzeń liniowa} \quad \mathbb{R}^3.$$

Wektory bazowe:

$$f_1 = (3, 1, 0) \quad (\text{dla } y = 1 \ z = 0); \qquad f_2 = (-2, 0, 1) \quad (\text{dla } y = 0, \ z = 1).$$

f_1, f_2 baza dla $\ker L$ bo dla każdego $f \in \ker L$:

$$f = yf_1 + zf_2, \Longrightarrow \dim \ker L = 2, \quad \Longrightarrow \quad \dim \operatorname{Im} \ L = 1.$$

Przekształcenie różnowartościowe.

*Przekształcenie liniowe $L : U \to V$ nazywamy **różnowartościowym** jeżeli z tego że $f \neq g \in U$ wynika $L(f) \neq L(g)$*

Twierdzenie.

Przekształcenie liniowe $L : U \to V$ jest różnowartościowym $\iff$ $\ker L = \{0\}$.

$\Updownarrow$ nie....... $\iff$ $\ker L \supset \{0\}$

nie.... $\Rightarrow \exists f \neq g$, że $L(f) = L(g) \Rightarrow u = f - g \neq 0$

$L(u) = L(f) - L(g) = 0 \Rightarrow u \in \ker L$.

$u \in \ker L$, $u \neq 0$, $f = u$, $g = 2u$, $f \neq g$ Ale $L(f) = L(u) = 0$, $L(g) = 2L(u) = 0$

$\Rightarrow Lf = Lg \Rightarrow$ nie......

Wykład VIII. Izomorfizm.

Przekształcenie I różnowartościowe.

Przekształcenie liniowe $L : U \to V$ nazywamy izomorfizmem jeżeli L jest różnowartościowym oraz Im $L = V$.

Innymi słowy:

Przekształcenie liniowe $L : U \to V$ jest izomorfizmem $\iff \begin{cases} \ker L = \{0\} \\ \operatorname{Im} L = V \end{cases}$.

Twierdzenie

Izomorfizm między U i V istnieje $\iff \dim U = \dim V$.

Wniosek I.

Każda przestrzenia liniowa U wymiaru $\dim U = n$ jest izomorficzna do przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$).

Wniosek II.

Mamy: przekształcenie liniowe $L : U \to V$, gdzie $\dim U = n$, $\dim V = m$.
Istnieje izomorfizm $T_n : U \to \mathbb{R}^n$. Podobnie, istnieje izomorfizm $T_m : V \to \mathbb{R}^m$
Odwzorowanie $\hat{L} = R_m L R_n^{-1}$ będzie przekształceniem liniowym z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

Ważny Wniosek.

Badanie przekształcenia liniowego $L : U \to V$ jest równoważne do badania przekształcenia liniowego $\hat{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Niech wekrory $f_1, f_2, \ldots f_n$ jest bazą przestrzeni liniowej U. Wówczas, dla każdego $f \in U$ istnieją jednoznacznie określone liczby $c_1, c_2, \ldots, c_n$ takie że

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$$

Uwaga

Liczby $c_1, c_2, \ldots c_n$ nazywamy współrzędnymi wektora f w bazie $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Izomorfizm T_n

$$T_n f = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Izomorfizm T_n

$$T_n f = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Wykład VIII.

Wykład VIII.

Wykład VIII.

Q&A

Dziękuję za Uwagę!