**Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie**

AGH University of Science
and Technology

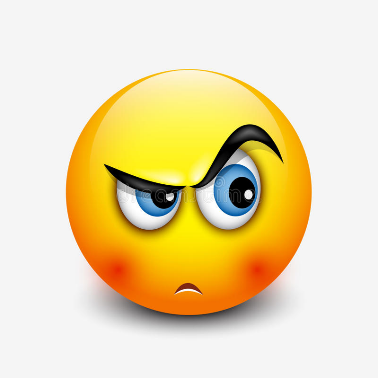
Przestrzenie liniowe. Bazy

[illegible]

Przykład.

$W[x]$ - zbiór wszystkich wielomianów rzeczywistych (zespolonych)

- $f(x), g(x) \in W[x] \Longrightarrow f(x) + g(x) \in W[x]$;
- $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;
- $(f(x) + g(x)) + z(x) = f(x) + (g(x) + z(x))$;
- dla wielomianu zerowego $g(x) \equiv 0$ mamy $f(x) + 0 = f(x)$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$, $\forall f(x) \in W[x] \Longrightarrow \alpha \cdot f(x) \in W[x]$;
- dla każdego $f(x) \in W[x]$, $\exists -f(x) \in W[x]$ taki że $f(x) + (-f(x)) = 0$;
- $1 \cdot f(x) = f(x)$, $\alpha(\beta \cdot f(x)) = (\alpha\beta) \cdot f(x))$;
- $(\alpha + \beta) \cdot f(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x)$, $\alpha \cdot (f(x) + g(x)) = \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x)$.



Rysunek: Marnujemy czas?

Definicja przestreni liniowej

Niepusty zbiór V nazywamy rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią liniową jeżeli:

- *dla dowolnych elementów $f, g \in V$ jest oikreślona ich suma $f + g \in V$;*
- $f + g = g + f$ *- przemienność dodawania;*
- $(f + g) + z = f + (g + z)$ *- łączność dodawania;*
- *istnieje element neutralny $0 \in V$ taki że $f + 0 = f, \ \forall f \in V$;*
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$, $\forall f \in V$ *określony jest iloczyn $\alpha \cdot f \in V$;*
- *dla każdego $f \in V$, $\exists$ element przeciwny $-f \in V$ taki że $f + (-f) = 0$;*
- $1 \cdot f = f, \ \alpha(\beta \cdot f) = (\alpha\beta) \cdot f)$;
- $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f, \ \alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$.

Wykład VII. Przestrzenie liniowe.

Przykłady

- $W_n[x]$ - zbiór wszystkich wielomianów stopnia $\leqslant n$;
- $W[a, b]$ - zbiór wszystkich wielomianów na $[a, b]$;
- $W_n[a, b]$ - zbiór wszystkich wielomianów stopnia $\leqslant n$ na $[a, b]$;
- $C[a, b]$- zbiór wszystkich funkcji ciągłych na $[a, b]$;
- $M_{n\times m}$ - zbiór macierzy wymiaru $n \times m$;
- $\mathbb{R}^n = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$;
- $\mathbb{C}^n = \{\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \ : \ z_i \in \mathbb{C}\}$.

Definicja podprestrzeni liniowej.

Niech V - przestrzeń liniowa. Niepusty zbiór $W \subset V$ nazywamy podprzestrzenią liniową przestrzeni V jeśli spełnione są warunki

- $f, g \in W \implies f + g \in W$;
- $\forall \alpha, \ \forall f \in W \implies \alpha \cdot f \in W$.

Przykłady podprzestrzeni.

Przykłady podprzestrzeni.

Liniowa zależność wektorów

Wektory $f_1, f_2, \ldots, f_n$ przestrzeni V są liniowo zależne jeżeli istnieją współczynniki $c_1, c_2, \ldots c_n$ nie wszystkie równe 0 i takie, że

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

W przeciwnym przypadku mówimy, że wektory $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są liniowo niezależne

Uwaga

Nieskończony układ wektorów w przestrzeni liniowej jest liniowo niezależnym jeżeli każdy jego skończony podukład jest liniowo niezależny. W przeciwnym przypadku mówimy że układ ten jest liniowo zależny.

Podprzestrzeń liniowa generowana przez zbiór wektorów

Wekrory $f_1, f_2, \ldots f_k$ przestrzeni liniowej V. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_k f_k, \qquad c_i \in \mathbb{R} \quad (c_i \in \mathbb{C})$$

nazywamy powłoką liniową wektorów $f_1, f_2, \ldots f_k$ i oznaczamy przez

$$\mathrm{span}\{f_1, f_2 \ldots f_k\}.$$

Uwaga

$W = \mathrm{span}\{f_1, f_2 \ldots f_k\}$ jest najmniejszą (w sensie zawierania) podprzestrzenią liniową przestrzeni V która zawiera wektory $f_1, f_2, \ldots f_k$. Dlatego, mówimy że podprzestrzeń W jest generowaną przez zbiór $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$.

Wykład VII.

Bardzo ważna definicja BAZY

Bazą przestrzeni V nazywamy układ wektorów $f_1, f_2, \ldots f_k$ spełniający warunki:

- wektory $f_1, f_2, \ldots f_k$ są liniowo niezależne;
- $\mathrm{span}\{f_1, f_2 \ldots f_k\} = V$

Własności baz.

- każda niezerowa przestrzeń liniowa ma bazę;
- dowolny zbiór wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni liniowej można uzupełnić do bazy tej przestrzeni;
- jeśli baza przestrzeni V składa się z n wektorów $n \in \mathbb{N}$ to każda inna baza tej przestrzeni także składa się z n wektorów.
- Wymiarem przestrzeni liniowej V nazywamy liczbę wektorów tej bazy.

Przestrzeń n-wymiarowa V

$\dim V = n \iff$ Przestrzeń V ma bazę z n wektorów $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Współrzędne wektora w bazie.

Niech $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jest bazą przestrzeni V i niech $f \in V$ dowolny wektor. Wówczas istnieją liczby $c_1, c_2, \ldots, c_n$ takie że

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$$

gdzie liczby $c_1, c_2, \ldots c_n$ są określone jednoznacznie

Uwaga

Liczby $c_1, c_2, \ldots c_n$ nazywamy współrzędnymi wektora f w bazie $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{f = (x_1, x_2, \dots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Wymiar $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Baza standardowa

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0, \dots 0) \\
e_2 &= (0, 1, 0, \dots 0) \\
e_3 &= (0, 0, 1, \dots 0) \\
&\ \ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
e_n &= (0, 0, 0, \dots 1)
\end{aligned}$$

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{f = (x_1, x_2, \dots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Twierdzenie.

Wektory

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots x_{1n}) \\ f_2 &= (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots x_{2n}) \\ f_3 &= (x_{31}, x_{32}, x_{33}, \ldots x_{3n}) \\ &\quad\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n &= (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots x_{nn}) \end{aligned}$$

jest bazą $\mathbb{R}^n \iff$

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \ldots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Twierdzenie.

Jeśli

$$\mathrm{rz}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = k \leqslant n$$

to układ wektorów

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots x_{1n}) \\ f_2 &= (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots x_{2n}) \\ f_3 &= (x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots x_{3n}) \\ & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n &= (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots x_{nn}) \end{aligned}$$

zawiera k liniowo niezależnych wektorów

Przestrzeń $W_n[x]$

$W_n[x]$ - zbiór wszystkich wielomianów stopnia $\leqslant n$

Wymiar $\dim W_n[x] = n + 1$.
Baza standardowa

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x, \ldots e_k(x) = x^k, \ldots e_n(x) = x^n.$$

Przestrzeń $W[x]$

$W[x]$ - zbiór wszystkich wielomianów.

Wymiar $\dim W[x] = \infty$.
Baza standardowa

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x, \ldots e_k(x) = x^k, \ldots e_n(x) = x^n, \ldots$$

Przestrzeń $M_{n\times m}$

$M_{n\times m}$ - zbiór macierzy wymiaru $n \times m$

Wymiar $\dim M_{n\times m} = n \cdot m$.

Wykład VII. Przestrzeni podstawowe

Wykład VII. Przestrzeni podstawowe

Wykład VII. Przestrzeni podstawowe

Wykład VII. Przestrzeni podstawowe

Q&A

Dziękuję za Uwagę!