Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Macierzy

Wykład III. Macierz, co to jest?

Definicja

Macierzą rzeczywistą (zespoloną) wymiaru $m \cdot n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ nazywamy prostokątną tablicę złożoną z $m \cdot n$ liczb rzeczywistych (zespolonych) ustawionych w m wierszach i n kolumnach

$$A = A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}].$$

$$A = A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = B_{4\times 1} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -1,5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Wykład III. Macierzy

Wykład III. Rodzaje macierzy

Macierz zerowa

$$0_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}, \quad a_{ij} = 0, \qquad 0_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz kwadratowa

- gdy $m = n$, macierz $A_{n\times n}$, nazywamy macierzą kwadratową, n nazywamy stopniem macierzy kwadratowej i piszemy $A_n \equiv A_{n\times n}$;
- Elementy macierzy kwadratowej a_{ii}, $1 \leqslant i \leqslant n$ tworzą główną przekątną macierzy

$$A_{4\times 3} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -10 & 1,5 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_{4\times 4} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 7 \\ -10 & 1,5 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz kwadratowa

- A_n – macierz diagonalna $\iff$ $a_{ij} = 0$, gdy $i \neq j$

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- A_n – macierz jednostkowa $\iff$ $a_{ij} = 0$, gdy $i \neq j$ oraz $a_{ii} = 1$

$$I_n = A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz transponowana

Macierz wymiaru $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierz transponowana A^T wymiaru $n \times m$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Suma macierzy

Macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ wymiaru $m \times n$. Sumą macierzy A i B nazywamy macierz $C = A + B$ wymiaru $m \times n$, której elementy c_{ij} są określone wzorem

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n.$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 4+2 & 3-2 & -1+7 \\ 3+0 & 1+2 & 5+4 & 2-1 \\ -1-2 & 0+1 & 7+3 & 6+3 \end{bmatrix} =$$

Iloczyn macierzy przez liczbę

Macierz $A = [a_{ij}]$ wymiaru $m \times n$ i liczbę $c \in \mathbb{C}$. Iloczynem macierzy A przez liczbę c nazywamy macierz $D = cA$ wymiaru $m \times n$ której elementy d_{ij} są określone wzorem

$$D = cA := \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}.$$

Przykład Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 13 \end{bmatrix}$ i $c = 2$. Wówczas

$$D = 2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & 26 \end{bmatrix}.$$

Własności

- $A + B = B + A$;
- $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- $(cd)A = c(dA)$;
- $1 \cdot A = A$;
- $c(A + B) = cA + cB$;
- $(c + d)A = cA + dA$;
- $(cA)^T = cA^T$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Iloczyn macierzy

Macierz $A = [a_{ij}]$ wymiaru $m \times n$ i macierz $\overset{B}{A} = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times p$. Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

wymiaru $m \times p$, której elementy c_{ij} są określone wzorem

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, p.$$

UWAGA!

Iloczyn macierzy A i B nie zawsze istnieje!

Rysunek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$B \cdot A \quad \text{nie istnieje, ale} \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Własności

- $A(BC) = (AB)C$;
- $A(B + C) = AB + AC$;
- $(A + B)C = AC + BC$;
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$;
- $AB \neq BA$;
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Wyznaczniki

Każdej macierzy KWADRATOWEJ $A = [a_{ij}]$ odpowiada pewna liczba (rzeczywista/zespolona) którą nazywamy wyznacznikiem macierzy A i oznaczamy przez $\det A$, $|A|$, $\det[a_{ij}]$ lub

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definicja wyznaczników

Wyznacznik macierzy A może być określony w sposób indukcyjny, tzn:

- macierz A stopnia 1, $\implies$ $\det A = \det[a] = a$;
- macierz A stopnia 2 $\implies$

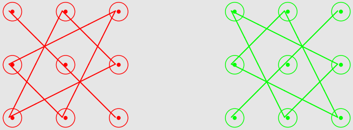
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

- macierz A stopnia 3 $\implies$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Reguła trójkąta obliczania wyznaczników



Reguła Sarrusa obliczania wyznaczników

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

jest macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$.

Dopełnienie algebraiczne

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy A.

Dopełnienie algebraiczne

Przykład. Obliczenie D_{23}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{3} & -\cancel{1} \\ 5 & 4 & -\cancel{3} \end{bmatrix}, \implies A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \implies$$

$$D_{23} = (-1)^{2+3} \det A_{23} = -\det \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(-5) = 5.$$

Wykład III. Obliczenie wyznaczników stopnia $n \geqslant 2$.

Niech

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika $\det A$ względem i-tego wiersza.

$$\boxed{\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \ldots + a_{in}D_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}D_{ik}}$$

Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika $\det A$ względem j-tej kolumny.

$$\boxed{\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \ldots + a_{nj}D_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}D_{kj}}$$

Przykład 1.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Przykład 2.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Wykład III. Obliczenie wyznaczników stopnia $n \geqslant 2$.

Przykład 3. Macierz trójkątna górna

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Przykład 4. Wyznacznik macierzy $D = cA$

$$\det D = \det cA = \begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{vmatrix} = c^n \det A$$

Q&A

Dziękuję za Uwagę!