Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Wielomiany

Wielomian rzeczywisty

Wielomianem rzeczywistym stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_j \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$

Wielomian zespolony

Wielomianem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots c_1 z + c_0,$$

gdzie $c_j \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0.$

Wielomian rzeczywistym/zespolony $\equiv$ *wielomian*

Stopień wielomianu $W(\cdot)$ oznaczamy przez $\deg W$, tzn. $\deg W = n$.

Dla sumy i iloczynu wielomianów $P(\cdot)$ i $Q(\cdot)$ mamy

$$\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg P, \deg Q\}; \quad \deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$$

Iloraz i reszta

Wielomian $S(x)$ jest ilorazem a wielomian $R(x)$ jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $Q(x)$, jeśli zachodzi warunek

$$W(z) = Q(x)S(x) + R(x),$$

gdzie $\deg(R) < \deg Q$.
Jeżeli $R \equiv 0$, to mówimy że wielomian W jest podzielny przez wielomian Q.

Przykład.

Obliczyć iloraz i resztę z dzielenia $W(x) = 8x^4 + 3x^2 + 5x - 6$ przez $Q(x) = x + 1$.

Pierwiastki

Liczbę rzeczywistą x_0 (zespoloną z_0) nazywami pierwiastkiem rzeczywistym (zespolonym) wielomianu $W(x)$ $(W(z))$, jeżeli $W(x_0) = 0$ $(W(z_0) = 0)$.

Wielomian zespolony $W(z) = z^2 + 1$ ma 2 pierwiastki $z_0 = i, z_1 = -i$

Wielomian rzeczywisty $W(x) = x^2 + 1$ nie ma żadnego pierwiastka.

Twierdzenie Bézout

Liczba x_0 będzie pierwiastkiem wielomianu $W(x) \iff$ istnieje wielomian $S(x)$ taki że
$$W(x) = (x - x_0)S(x).$$

Wniosek 1

$\deg S = \deg W - 1.$

Wniosek 2

Każdy wielomian W stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Wielomian W stopnia 2020 ma 2021 pierwiastków. Czy prawda?

Zasadnicze Twierdzenie Algebry

$\boxed{\text{Każdy wielomian ZESPOLONY stopnia dodatniego } (n \geqslant 1) \text{ ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.}}$

Wniosek z ZTA

Każdy wielomian zespolony $W(z)$ stopnia $\deg W = n$ ma postać

$$W(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots (z - z_n),$$

gdzie $z_1, z_2, \ldots z_n$ są pierwiastkami $W(z)$.

Czy może być, że $z_1 = z_2 = \ldots z_k, \quad (k \leqslant n)$?

Rozkład na nierozkładalne czynniki zespolone

$$\boxed{\begin{array}{l} W(z) = a(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots (z - z_m)^{k_m} \\ \text{gdzie } k_1 + \ldots k_m = n, \quad m \leqslant n. \end{array}}$$

Definicja

Liczba z_0 jest pierwiastkiem k-krotnym dla wielomianu $W(z)$ jeśli

$$W(z) = (z - z_0)^k P(z), \qquad P(z_0) \neq 0.$$

gdzie $k_1 + \ldots k_m = n, \quad m \leqslant n.$

Twierdzenie

Każdy wielomian <u>zespolony</u> stopnia n ma dokladnie n pierwiastków (licząc krotności).

Obliczenie krotności pierwiastka.

z_0 – pierwiastek k-krotny wielomianu $W(z)$ $\iff$

$$W(z_0) = W'(z_0) = \ldots = W^{(k-1)}(z_0) = 0, \text{ ale } W^{(k)}(z_0) \neq 0,$$

gdzie

$$W^{(m)}(z_0) = \frac{d^m}{dz^m} W(z)\Big|_{z=z_0}.$$

Przykład obliczenia krotności.

$W(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$ krotność dla $z_0 = 1$.

Wzory Viétea

wielomian zespolony $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, *pierwiastki wielomianu* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *(z uwzględnieniem krotności). Wówczas:*

- $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$;
- $z_1 z_2 \ldots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

$\deg W = 2$.

$$W(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = a_2(z - z_1)(z - z_2) = a_2(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2)$$

$\Longrightarrow$

$$z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \qquad z_1 z_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Wielomian rzeczywisty $W(x)$, czy istnieje rozkład na nierozkładalne czynniki rzeczywiste?

$W(x) \to W(z)$ – wielomian zespolony o współczynnikach rzeczywistych

Twierdzenie

Liczba zespolona z_0 będzie pierwiastkiem k-krotnym $\iff$ $\overline{z}_0$ – pierwiastek k-krotny.

Dowód.

$$W(z_0) = 0 \iff \overline{W(z_0) = 0} \iff \overline{W(z_0)} = 0 \iff W(\overline{z}_0) = 0.$$

$\square$

Wielomian rzeczywisty $W(x)$, czy istnieje rozkład na nierozkładalne czynniki rzeczywiste?

Rozklad dla wielomianu zespolonego

$$W(z) = a(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots (z - z_m)^{k_m}$$

gdzie $k_1 + \ldots k_m = n, \quad m \leqslant n$.

Analiza rozkładu

- Jeśli $z_1 \in \mathbb{R}$ to $z_1 = x_1$;
- Jeśli $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, to $z_2 = \overline{z}_1 \;$ i $\; k_1 = k_2$.

$$(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} = [(z - z_1)(z - \overline{z}_1)]_1^k = [z^2 - (z_1 + \overline{z}_1)z + |z_1|]^k$$

$z^2 - (z_1 + \overline{z}_1)z + |z_1| = z^2 - b_1 z + c_1$, gdzie $b_1 = z_1 + \overline{z}_1 = 2Re\ z, \; c_1 = |z_1|^2$.

Rozkład na nierozkładalne czynniki rzeczywiste dla wielomianu rzeczywistego

$$\boxed{W(x) = a(x^2 - b_1 x + c_1)^{k_1} \ldots (x^2 - b_s x + c_s)^{k_s} (x - x_{2s+1})^{k_{2s+1}} \ldots (x - x_m)^{k_m}.}$$

Uwagi do rozkładu

$$x_{2s+1}, \ldots x_m \quad -- \quad \textit{pierwiastki rzeczywiste};$$

$$z_1, \overline{z_1}, \ z_2, \overline{z_2}, \ldots z_s, \overline{z_s} \quad -- \quad \textit{pierwiastki zespolone}.$$

rozkład na trójmiany kwadratowe oraz na dwumiany

Q&A

Dziękuję za Uwagę!