**Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.**

IMiIP, IO, 06.02.2020

**1.** *Znaleźć wartości i wektory własne następującej macierzy $A$. Obliczyć krotności algebraiczne i geometryczne. Wyznaczyć postać Jordana macierzy $A$.* (10pt)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**2.** *Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu:*

$$W(z) = z^4 + 4z^3 + 15z^2 + 22z + 30.$$

*wiedząc, że $z_1 = -1 + 2i$ jest jednym z nich, oraz wybierz spośród nich te, które należą do zbioru* $\{z \in \mathbb{C} : \pi < Arg(z) < \frac{3\pi}{2}\}$. (8pt).

**3.** *Obliczyć wyznacznik, jeśli* $z = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$

$$\begin{vmatrix} z & 1 & z \\ 1 & z^2 & z \\ z & -z & -1 \end{vmatrix} \qquad (8pt)$$

**4.** *Dla jakich wartości parametru $p$ układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie. Określić liczby rozwiązań w pozostałych przypadkach. (10pt)*:

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 7 \\ px + 2y + z = 8 \\ y + pz = 5 \end{cases}$$

**5.** *Niech operator liniowy $L$ w przestrzeni Euklidesowej $\mathbf{R}^3$ jest dany wzorem*

$$L(x, y, z) = (x - y + 2z,\ 3y - z,\ 4z).$$

*a) Znaleźć widmo operatora $L$. Czy operator $L$ jest symetrycznym?*
*b) Znaleźć jądro operatora $L$ i obliczyć* $\dim ImL$.
*c) Czy operator $L$ jest różnowartościowym? Czy jest izomorfizmem?*
*d) Czy operator $L$ jest diagonalizowalnym?* (10pt).

**6.** *Niech $\vec{h} = (1, 0, 1)$ będzię wektorem presztrzeni Euklidesowej $\mathbf{R}^3$. Natomiast $V$ podprzestrzeń $\mathbf{R}^3$ z bazą $\vec{u}_1 = (2, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$ oraz $M$ podprzestrzeń $\mathbf{R}^3$ z bazą $\vec{v}_1 = (-1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$. Do której z podprzestrzeni $V$ czy $M$ odległość wektora $\vec{h}$ jest mniejsza? (8pt)*