Diagonalizacja macierzy

1. Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne macierzy A w $\mathbb{R}$:

$a)\quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};\quad b)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};\quad c)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\quad d)\quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad e)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$

2. Wyznacz rząd macierzy:

   Wyznaczyć wartości i wektory własne podanych odwzorowań liniowych:

   a) Symetria względem osi Ox w przestrzeni $\mathbb{R}^2$;

   b) Obrót wokół Oy o kąt $\frac{\pi}{6}$w przestrzeni $\mathbb{R}^3$;

   c) Rzut na oś Oz w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

3. Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne odwzorowania liniowego:

   a) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ L(x, y, z) = (z - x, 2x - 2z, 2z - 2x)$;

   b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ L(x, y, z) = (x + z, 4y, x + z)$;

   c) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ L(x, y, z, t) = (x + y, y + z, z + t, t + x)$;

   sprawdzić, czy istnieje baza złożona z wektorów własnych.

4. Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są diagonalizowalne:

   a) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ L(x, y, z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, -x + y + z)$;

   b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ L(x, y, z) = (x + 3y, 2y - z, -4z)$.

   Jeżeli odwzorowanie jest diagonalizowalne, znaleźć bazę w której macierz odwzorowania jest diagonalna.

5. Dla macierzy A, znaleźć, o ile istnieje, macierz diagonalną D oraz nieosobliwą P, takie, że $A = PDP^{-1}$

$a)\quad A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix};\quad b)\quad A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & -10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix};\quad c)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$

6. Odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ przekształca wektory $v_1 = (0, 1, 2),\ v_2 = (1, 1, 3),\ v_3 = (2, 1, 2)$ w wektory $u_1 = (0, -1, -2),\ u_2 = (0, 0, 0),\ u_3 = (2, 1, 2)$. Znaleźć wzór tego odwzorowania oraz $L^{100}(x, y, z) :\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

7. Dla macierzy A, znaleźć:

   a) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$;

   b) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Niech

$$X = \operatorname{span}\{e^x, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}.$$

   Rozważmy odwzorowanie $T(f) = f'' + f$.

   a) Czy T jest endomorfizmem na X?

   b) Jeżeli odpowiedź w punkcie a) jest pozytywna, wyznacz wartości własne endomorfizmu T. Czy jest on diagonalizowalny?