

## Wstęp

Metoda elementów skończonych jako metoda aproksymacji równań różniczkowych (cząstkowych w 2D i 3D) produkuje rozwiązania różniące się zazwyczaj od rozwiązań dokładnych (analitycznych). Różnice wynikają z natury dyskretyzacji MES, przybliżenia odwzorowania obszaru za pomocą siatki MES lub z przybliżeń parametrów równania.

Ważną cechą aproksymacji MES jest fakt, że błąd dyskretyzacji (zakładając dokładne odwzorowanie obszaru i dokładne dane materiałowe) jest funkcją rozmiaru elementów – im mniejsze elementy, tym rozwiązanie MES jest bliższe rozwiązaniu dokładnemu.

Z dokładnej postaci wzoru określającego błąd, wiemy również, że błąd aproksymacji wyższego rzędu jest mniejszy od błędu aproksymacji liniowej oraz że szybciej zbiega do zera wraz z malejącym rozmiarem elementów.

### Zadanie 1.

#### Wygenerowanie plików programu ModFEM

```
MOD_FEM_conv_diff_prism_dg,  
MOD_FEM_conv_diff_prism_std,  
MOD_FEM_conv_diff_prism_std_quad
```

,aby tego dokonać należy wcześniej zmodyfikować plik

~/ModFEM/src/cmake/Platforms/imie\_nazwisko.cmake

```
# ----- CONV_DIFF -----  
set(CREATE_MOD_FEM_CONV_DIFF_PRISM_STD TRUE)  
set(CREATE_MOD_FEM_CONV_DIFF_PRISM_STD_QUAD TRUE)  
set(CREATE_MOD_FEM_CONV_DIFF_HYBRID_STD FALSE)  
set(CREATE_MOD_FEM_CONV_DIFF_HYBRID_STD_QUAD FALSE)  
set(CREATE_MOD_FEM_CONV_DIFF_PRISM2D_STD FALSE)  
set(CREATE_MOD_FEM_CONV_DIFF_PRISM2D_STD_QUAD FALSE)  
set(CREATE_MOD_FEM_CONV_DIFF_PRISM_DG TRUE)  
set(CREATE_MOD_FEM_CONV_DIFF_HYBRID_DG FALSE)  
set(CREATE_MOD_FEM_CONV_DIFF_PRISM2D_DG FALSE)
```

oraz plik ~/ModFEM/src/lsd\_mkb/lsd\_mkb\_pardiso/lss\_mkb\_pardiso.c

```
// ??????????  
//int msglvl = lsv_mkb_pardiso_solver[Solver_id].par  
//msglvl=lsv_mkb_pardiso_solver[Solver_id].monitor;  
int msglvl = 0;  
|
```

Utworzenie folderu lab\_10 oraz skopiowanie do niego zawartości folderu

/home/students\_nm/ModFEM/lab\_10\_example

Pobranie pliku problem\_conv\_diff.dat

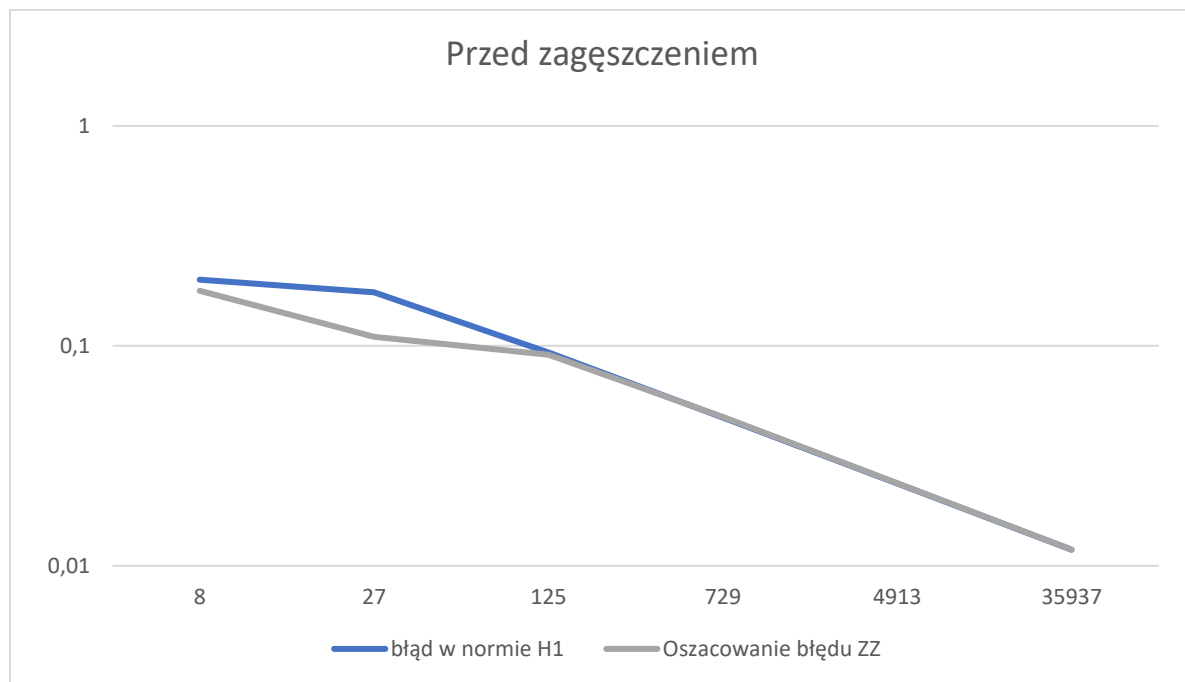
## Zadanie 2.

Uruchomienie programu MOD\_FEM\_conv\_diff\_prism\_std używając sekwencji operacji: s, e, z.

Powyższe czynności należy wykonać dla elementów od 2 aż do 65536.

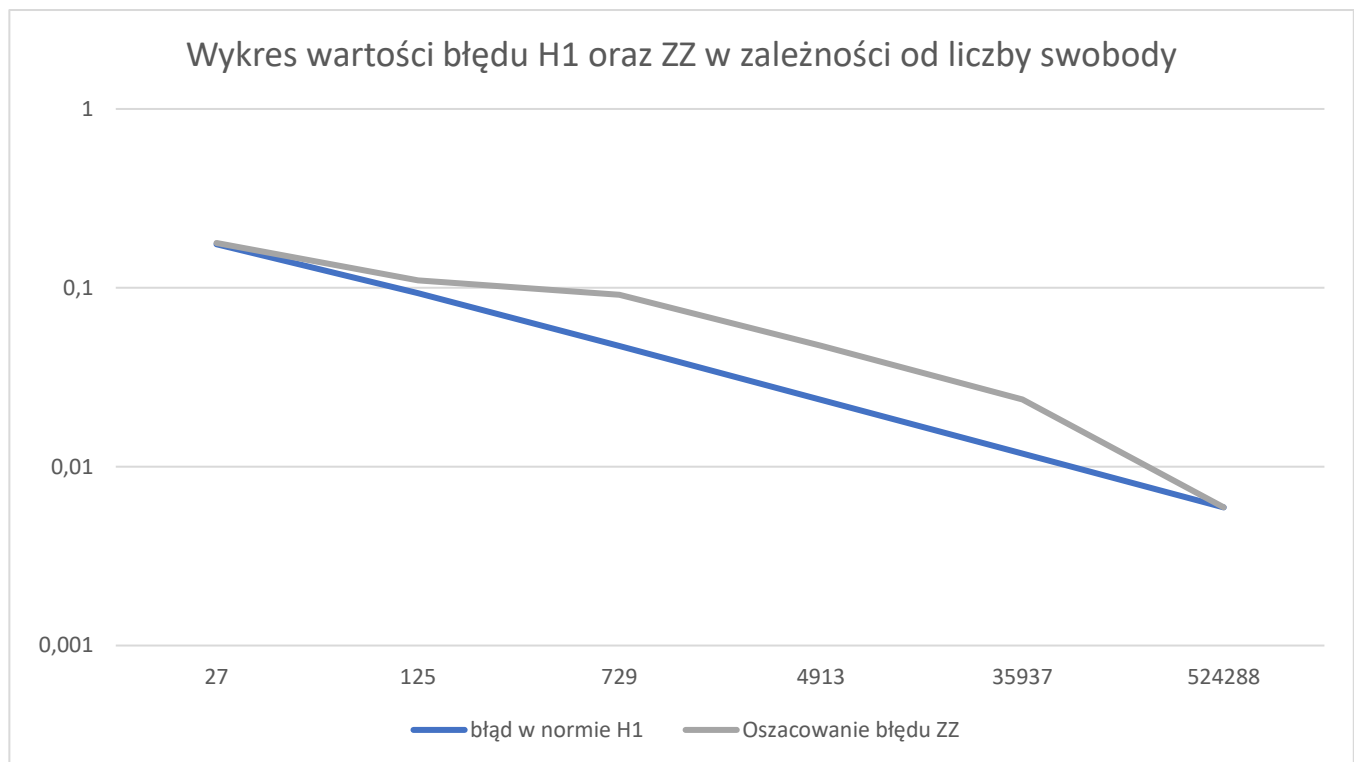
Przed zagęszczeniem

| symbol pdeg | liczba elementów | rozmiar elementów | liczba wierzchołków | liczba stopni swobody NDOF | błąd w normie L2 | błąd w normie H1 | Oszacowanie błędu ZZ |
|-------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------------|------------------|------------------|----------------------|
| 101         | 2                | 1                 | 8                   | 8                          | 0,024102608      | 0,200044816      | 0,18                 |
|             | 16               | 1                 | 27                  | 27                         | 0,016311859      | 0,175241508      | 0,10992892           |
|             | 128              | 1                 | 128                 | 125                        | 0,004348305      | 0,093249193      | 0,091270028          |
|             | 1024             | 1                 | 1024                | 729                        | 0,001135611      | 0,047187845      | 0,047526324          |
|             | 8192             | 1                 | 8192                | 4913                       | 0,000287977      | 0,023660934      | 0,023770473          |
|             | 65536            | 1                 | 65536               | 35937                      | 7,23E-05         | 0,011838223      | 0,011862226          |



Po zagęszczeniu

| symbol pdeg | liczba elementów | rozmiar elementów | liczba wierzchołków | liczba stopni swobody NDOF | błąd w normie L2 | błąd w normie H1 | Oszacowanie błędu ZZ |
|-------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------------|------------------|------------------|----------------------|
| 101         | 16               | 1                 | 27                  | 27                         | 0,016311859      | 0,175241508      | 0,18                 |
|             | 128              | 0,25              | 128                 | 125                        | 0,004348305      | 0,093249193      | 0,10992892           |
|             | 1024             | 0,125             | 1024                | 729                        | 0,001135611      | 0,047187845      | 0,091270028          |
|             | 8192             | 0,0625            | 8192                | 4913                       | 0,000287977      | 0,023660934      | 0,047526324          |
|             | 65536            | 0,03125           | 65536               | 35937                      | 7,23E-05         | 0,011838223      | 0,023770473          |
|             | 274625           | 0,015625          | 274625              | 524288                     | 1,81E-05         | 0,005919982      | 0,005925099          |



Z obserwacji obu wykresów wynika, że oszacowanie normy błędu ZZ jest bardzo dobre, szczególnie przy większej liczbie stopni swobody.

### Zadanie 3.

W celu wykonania tego zadania powtórzono kroki z zadania drugiego, lecz tym razem dla pliku MOD\_FEM\_cony\_diff\_prism\_std\_quad. i dokonanie operacji za pomocą: s, e.

Zastosowano aproksymację kwadratową PDEG 201.

| symbol pdeg | liczba elementów | rozmiar elementów | liczba wierzchołków | liczba stopni swobody NDOF | błąd w normie L2 | błąd w normie H1 | Współczynnik nachylenia |
|-------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------------|------------------|------------------|-------------------------|
| 101         | 2                | 1                 | 8                   | 27                         | 0,024102608      | 0,20004482       | 1,141537863             |
|             | 16               | 0,5               | 27                  | 125                        | 0,016311859      | 0,17524151       | 1,879281769             |
|             | 128              | 0,25              | 125                 | 729                        | 0,004348305      | 0,09324919       | 1,976127387             |
|             | 1024             | 0,125             | 729                 | 4913                       | 0,001135611      | 0,04718785       | 1,994335643             |
|             | 8192             | 0,0625            | 4913                | 35937                      | 0,000287977      | 0,02366093       | 1,99868966              |
|             | 65536            | 0,03125           | 35937               | 274625                     | 7,23E-05         | 0,01183822       | -                       |

Dla aproksymacji liniowej współczynnik nachylenia wynosi 2, natomiast dla aproksymacji kwadratowej wynosi 4. Stąd można stwierdzić, że jest on 2 razy większy. Rozmiar elementów w dwóch aproksymacjach jest taki sam, natomiast zmienia się błąd w normie H1, gdyż jest on w aproksymacji kwadratowej dwa razy większy niż w aproksymacji liniowej. Dla symbolu pdeg 201 norma błędu zmniejsza się 4 krotnie, a dla symbolu pdeg 101 zmniejsza się 2 krotnie.

| symbol pdeg | liczba elementów | rozmiar elementów | liczba wierzchołków | liczba stopni swobody NDOF | błąd w normie L2 | błąd w normie H1 | Współczynnik nachylenia |
|-------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------------|------------------|------------------|-------------------------|
| 201         | 2                | 1                 | 8                   | 27                         | 0,014301158      | 0,158308668      | 6,396046687             |
|             | 16               | 0,5               | 27                  | 125                        | 0,002235937      | 0,037939465      | 7,497096553             |
|             | 128              | 0,25              | 125                 | 729                        | 0,00029824       | 0,009745478      | 7,898138934             |
|             | 1024             | 0,125             | 729                 | 4913                       | 3,77608E-05      | 0,002446439      | 7,978582615             |
|             | 8192             | 0,0625            | 4913                | 35937                      | 4,73278E-06      | 0,000611971      | 7,981844314             |
|             | 65536            | 0,03125           | 35937               | 274625                     | 5,92943E-07      | 0,00015301       | -                       |

### Oszacowanie teoretyczne

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \cdot h^s |\mathbf{u}|_{s+1, \Omega},$$

gdzie  $s = \min(k, l)$ , a stała  $C$  jest niezależna od  $h$  i  $\mathbf{u}$ .

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V,$$

Dwa zasadnicze czynniki wpływające na rząd zbieżności MES:

- rząd aproksymacji  $k$ ,
- stopień regularności  $l$  rozwiązania ścisłego.

-  $h$  rozmiar elementu

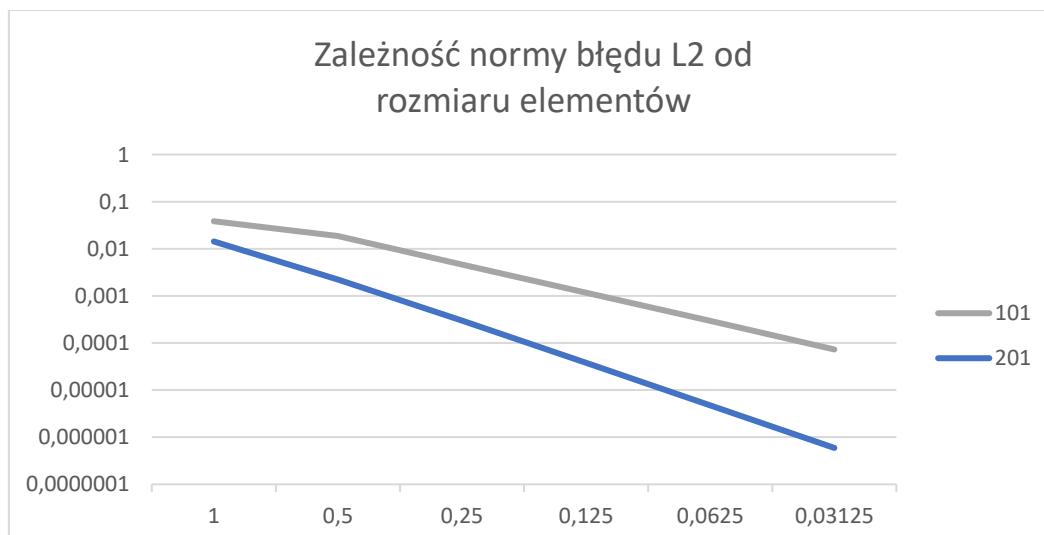
-  $p$  stopień wielomianu

Dane wynikające z eksperymentu: rozmiar elementu:  $x$ ; wartość normy aproksymacji:  $y$ . Zakładając, że do wykresu użyliśmy skali logarytmicznej wynika równość  $\log x = \log y \Leftrightarrow x = y$ .

Biorąc pod uwagę aproksymację kwadratową równanie będzie mieć postać  $2 \log x = \log y \Leftrightarrow y = x^2$ , z czego wynika, że norma błędu jest funkcją kwadratową rozmiaru elementu. Za stopień wielomianu dla aproksymacji liniowej przyjmujemy  $p = 1$ , a dla kwadratowej  $p = 2$ . Podstawiając dane do oszacowania teoretycznego otrzymujemy te same funkcje, co świadczy o prawidłowym wykonaniu eksperymentu.

#### Zadanie 4.

Stworzenie wykresu dotyczącego norm błędu L2 od rozmiaru elementów dla danych z zadania 3.

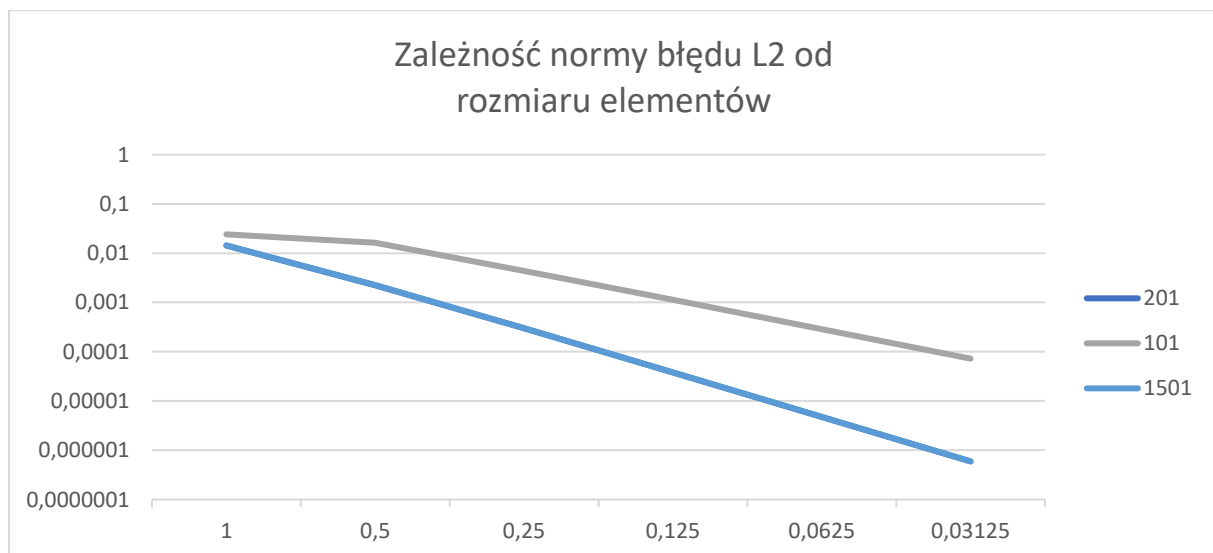
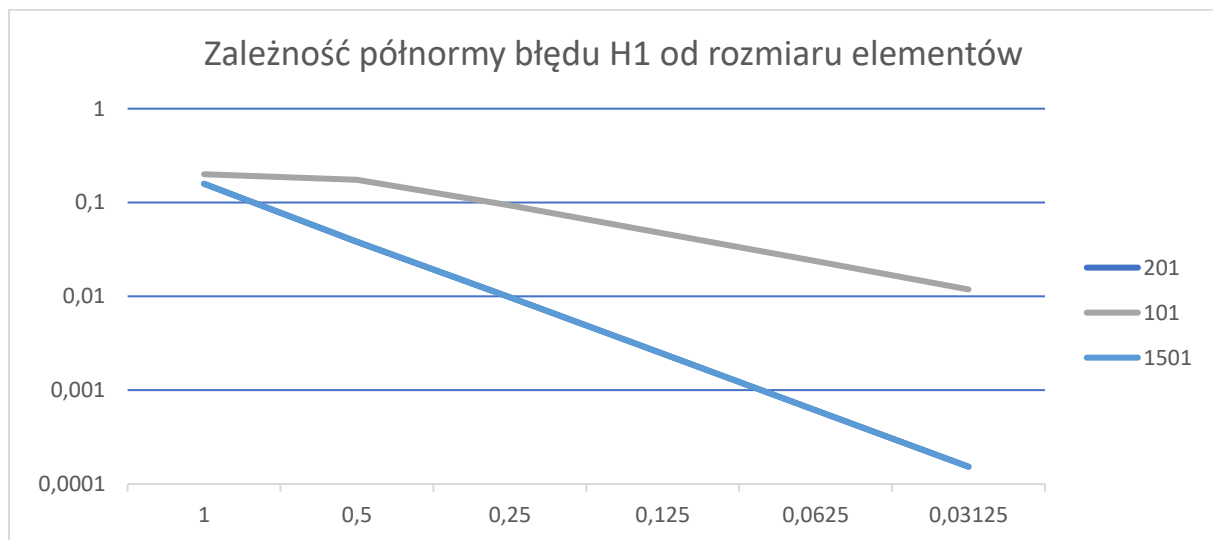


Dla aproksymacji liniowej współczynnik nachylenia wynosi 4, natomiast dla aproksymacji kwadratowej 8. Norma błędu w aproksymacji kwadratowej maleje aż 8 krotnie, natomiast w liniowej 4 krotnie. Dla aproksymacji liniowej można wywnioskować równanie  $x = y^2$ , a dla kwadratowej  $x = y^4$ . Porównując powyższe wyniki, można stwierdzić, że trudniej aproksymuje się pochodne funkcji niż funkcje.

Zadanie 5.

Należy zrobić to samo co dla zadania trzeciego, przy ustawieniu PDEG na 1501.

| symbol pdeg | liczba elementów | rozmiar elementów | liczba wierzchołków | liczba stopni swobody NDOF | błąd w normie L2 | błąd w normie H1 | oszacowanie normy błędu ZZ |
|-------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------------|------------------|------------------|----------------------------|
| 1501        | 2                | 1                 | 8                   | 22                         | 0,01430882       | 0,15838851       | 0,154444003                |
|             | 16               | 0,5               | 27                  | 93                         | 0,0022442        | 0,03847646       | 0,109746008                |
|             | 128              | 0,25              | 125                 | 505                        | 0,00029806       | 0,00978316       | 0,08945249                 |
|             | 1024             | 0,125             | 729                 | 3249                       | 3,78E-05         | 0,0024482        | 0,047306022                |
|             | 8192             | 0,0625            | 4913                | 23137                      | 4,73E-06         | 0,00061205       | 0,023741068                |
|             | 65536            | 0,03125           | 35937               | 174273                     | 5,93E-07         | 0,00015301       | 0,011858076                |



Można zauważyć, że wykresy dla aproksymacji funkcjami hierarchicznymi są praktycznie takie same jak wykresy dla aproksymacji kwadratowej. Oznacza to, że błąd normy nie ulega zmianie.

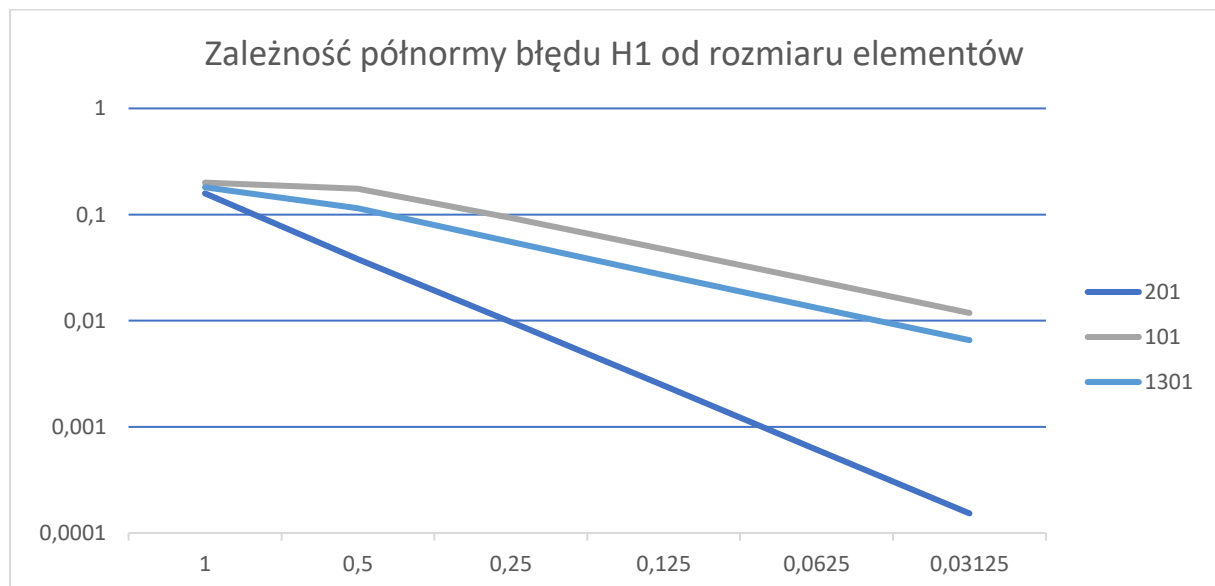
W przypadku aproksymacji funkcjami hierarchicznymi liczba stopni swobody jest mniejsza niż w aproksymacji kwadratowej.

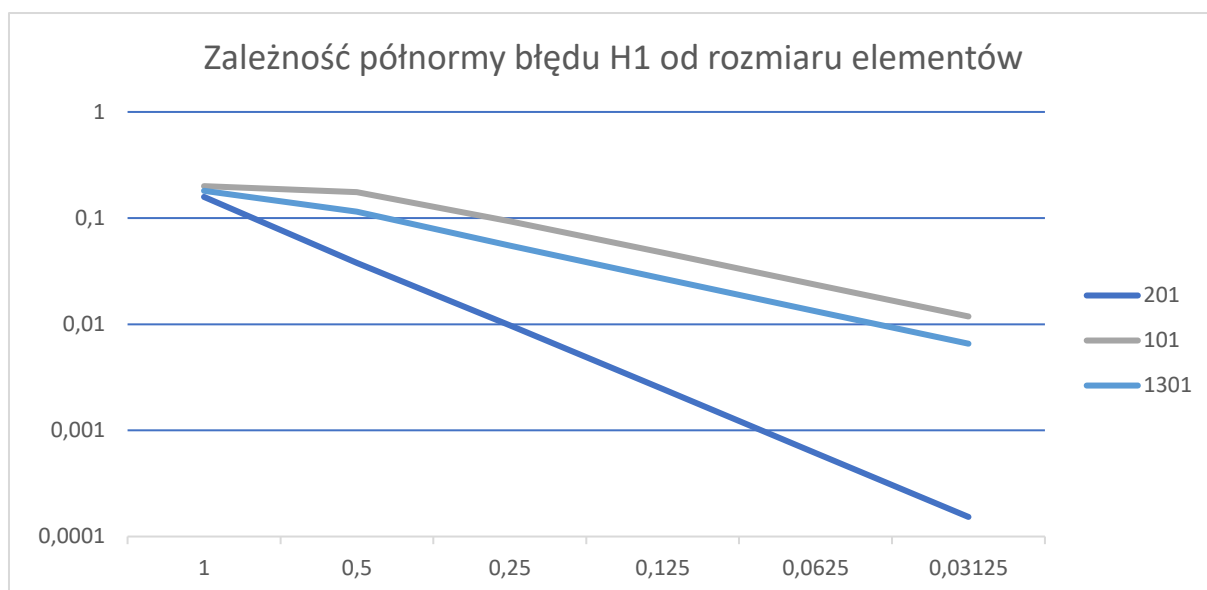
Wynika z tego, że rząd zbieżności pozostaje taki sam, a różnica między tymi dwoma aproksymacjami polega na czasie rozwiązywania układu równań. Metoda wykorzystująca funkcje hierarchiczne pozwala na szybsze rozwiązanie.

#### Zadanie 7.

Powtórzenie badania dla specyficznej aproksymacji z funkcją bubble dla PDEG = 1301.

| symbol pdeg | liczba elementów | rozmiar elementów | liczba wierzchołków | liczba stopni swobody NDOF | błąd w normie L2 | błąd w normie H1 | oszacowanie normy błędu ZZ |
|-------------|------------------|-------------------|---------------------|----------------------------|------------------|------------------|----------------------------|
| 1301        | 2                | 1                 | 8                   | 13                         | 0,01623947       | 0,18076419       | 0,214871594                |
|             | 16               | 0,5               | 27                  | 59                         | 0,01024498       | 0,114891135      | 0,245097687                |
|             | 128              | 0,25              | 125                 | 349                        | 0,0026877        | 0,05516436       | 0,142535259                |
|             | 1024             | 0,125             | 729                 | 2393                       | 0,00066145       | 0,026850634      | 0,15076471                 |
|             | 8192             | 0,0625            | 4913                | 17713                      | 0,00016216       | 0,013223962      | 0,128464504                |
|             | 65536            | 0,03125           | 35937               | 136289                     | 4,00E-05         | 0,00655941       | 0,134342335                |





| Zadanie (skrótowy opis) | OCENA własna studenta w % (0-100) | OCENA prowadzącego w % (0-100) |
|-------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| Zadanie 1               | 100                               |                                |
| Zadanie 2               | 100                               |                                |
| Zadanie 3               | 100                               |                                |
| Zadanie 4               | 100                               |                                |
| Zadanie 5               | 100                               |                                |
| Zadanie 7               | 100                               |                                |
| ŁĄCZNIE ():             | 500 (600)                         |                                |