

Rozwiązywanie równań nieliniowych

Metoda stycznych

Założenia:

- 1) W przedziale $[a, b]$ funkcja posiada pierwiastek $f(x) = 0$ gdy $f(a)f(b) < 0$.
- 2) Funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i posiada pochodną.
- 3) Pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ ma stały znak na przedziale $[a, b]$.

Algorytm metody stycznych:

- 1) Wybieramy punkt startowy x_0 – zazwyczaj $a, b, 0$ lub 1 .
- 2) Wyprowadzamy styczną w tym punkcie do funkcji $f(x)$. Współrzędna odcięta punktu przecięcia stycznej z osią OX (x_1) stanowi pierwsze przybliżenie pierwiastka funkcji.
- 3) Jeżeli przybliżenie nie jest zadowalające powtarzamy krok 2, a za punkt startowy wybieramy x_1 .

Wzór na kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji $f(x)$ jest następujący:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1)$$

Przykład:

Dla funkcji $f(x) = -x^3 + 10x + 5$ wyznacz miejsce zerowe na przedziale $[2, 6]$. Jako punkt startowy przyjmij $x_0 = 6$.

Obliczenia:

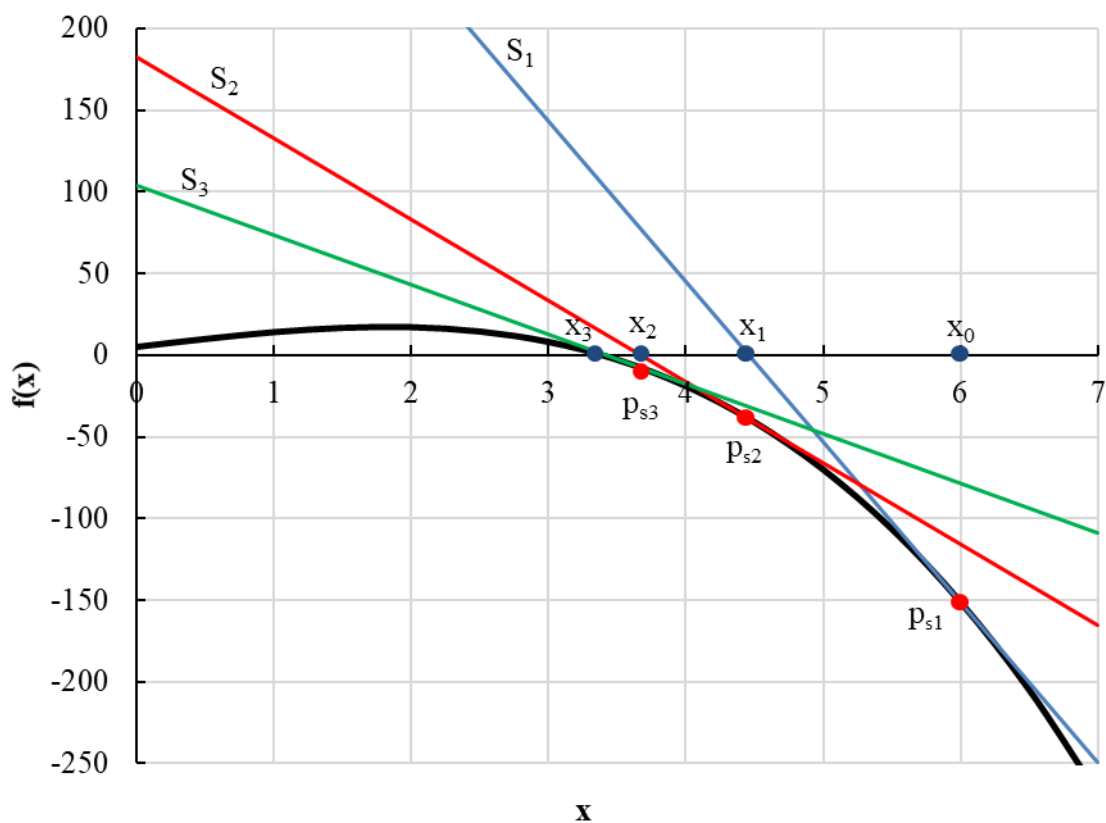
$$f'(x) = -3x^2 + 10$$

$$x_1 = 6 - \frac{-6^3 + 10 * 6 + 5}{-3 * 6^2 + 10} = 4,459$$

$$x_2 = 4,459 - \frac{-4,459^3 + 10 * 4,459 + 5}{-3 * 4,459^2 + 10} = 3,672$$

$$x_3 = 3,672 - \frac{-3,672^3 + 10 * 3,672 + 5}{-3 * 3,672^2 + 10} = 3,416$$

Postępowanie wyznaczania kolejnych stycznych, punktów styczności i punktów przecięcia przedstawiono na Rys. 1



Rys. 1. Schemat działania metody stycznych – pierwsze 3 kroki. $S_1 \dots S_3$ – styczne, $x_1 \dots x_3$ – punkty przecięcia, $p_{s1} \dots p_{s3}$ – punkty styczności.

W wyniku działania algorytmu możemy znaleźć rozwiązanie, które nie leży w zadanym przedziale. Wszystko zależy od doboru punktu startowego i nachylenia stycznej do wykresu.

Metoda siecznych

W metodzie siecznych pochodną funkcji możemy przybliżyć ilorazem różnicowym:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (2)$$

Wtedy wzór na kolejne przybliżenia rozwiązania jest w postaci:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (3)$$

Zadanie

Napisz program, który rozwiąże dowolne równanie nieliniowe metodą stycznych i siecznych. Wymagania:

- Funkcję $f(x)$ i pochodną funkcji $f'(x)$ implementujemy jako odrębne funkcje.
- Pochodną funkcji $f'(x)$ dla metody stycznych obliczamy analitycznie.
- Użytkownik podaje punkt startowy x_0 . Dla metody siecznych przyjmij punkt startowy x_{-1} o 0.1 mniejszy od x_0 .
- Warunkiem stopu jest podana przez użytkownika liczba iteracji.
- Program powinien wypisać:
 - funkcję $f(x)$ – równanie,
 - znalezione rozwiązanie x i wartość funkcji $f(x)$ dla każdej iteracji.

Wykonaj obliczenia dla przykładu podanego w instrukcji (dla $x_0 = 6$ i dla 5 iteracji) i dla dwóch dowolnych funkcji wielomianowych. Dla wybranych przez siebie funkcji punkt startowy i liczbę iteracji przyjmij dowolnie. Porównaj wyniki uzyskane z obu metod z wartościami dokładnymi. Wyniki przedstaw w sprawozdaniu.

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-12 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-12).