Aproksymacja

Przyczyny stosowania aproksymacji:

- chęć zastąpienia funkcji niedogodnej do obliczeń numerycznych inną, dogodniejszą funkcją, która będzie niewiele odbiegać od funkcji wyjściowej,
- potrzeba wyznaczenia wartości funkcji danej dyskretnie (na skończonej liczbie punktów) w innym punkcie obszaru,
- konieczność znalezienia dostatecznie gładkiej funkcji ciągłej przechodzącej w pobliżu zadanych punktów,
- różniczkowanie numeryczne.

Aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów

Dane są wartości pewnej funkcji $y = f(x)$, która na zbiorze X punktów $x_0, x_1 \dots x_m$ przyjmuje wartości $y_0, y_1 \dots y_m$. Zadaniem aproksymacji średniokwadratowej jest wyznaczenie takiej funkcji $F(x)$, aby zminimalizować błąd:

$$E = \sum_{i=0}^{m} w(x_i)\,[f(x_i) - F(x_i)]^2 \tag{1}$$

gdzie: $w(x_i)$ – funkcja wagowa, m – ilość punktów – 1.

Poszukujemy wielomianu w postaci:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x) \tag{2}$$

gdzie: a_j – współczynniki wielomianu, n – stopień wielomianu, $\varphi_j(x)$ – funkcja bazowa.

Podstawiając (2) do (1) otrzymujemy:

$$E = \sum_{i=0}^{m} w(x_i) \left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) \right]^2 \tag{3}$$

Aby zminimalizować błąd obliczamy pochodne cząstkowe funkcji E względem każdego z parametrów a (warunek na ekstremum funkcji):

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=0}^{m} w(x_i) \left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) \right] \varphi_k(x_i) = 0 \tag{4}$$

gdzie: $k = 0,1,2, \dots n$

Przyjmujemy bazę przestrzeni funkcji aproksymujących w postaci:

$$\begin{gathered} \varphi_j(x) = x^j, dla\ j = 0,1,2, \dots n \\ \varphi_k(x) = x^k, dla\ k = 0,1,2, \dots n \end{gathered} \tag{5}$$

Po uproszczeniu i zmianie kolejności sumowania równania (4) otrzymujemy:

$$\sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) f(x_i) w(x_i) - \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i) w(x_i) \sum_{j=0}^{n} a_j = 0 \qquad (6)$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$g_{kj} = \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i) w(x_i) \qquad (7)$$

$$F_k = \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) f(x_i) w(x_i) \qquad (8)$$

Wtedy równanie (6) przyjmuje postać:

$$\sum_{j=0}^{n} g_{kj}\, a_j = F_k, dla\ k = 0,1,2, \dots, n \qquad (9)$$

Układ równań liniowych w postaci macierzowej ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0j} & \cdots & g_{0n} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1j} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k0} & g_{k1} & \cdots & g_{kj} & \cdots & g_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n0} & g_{n1} & \cdots & g_{nj} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \qquad (10)$$

lub:

$$g \cdot a = F \qquad (11)$$

Przykład

Mamy dane punkty: (1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 5), (5, 6), (6, 9), (7, 11), (8, 11). Przyjmujemy, że podane punkty chcemy opisać funkcją liniową. Zakładamy, że dla wszystkich punktów waga jest równa 1. Następnie podstawiając odpowiednie dane do wzorów (7) i (8) otrzymujemy:

$$\begin{gathered} g_{00} = 8 \\ g_{01} = 36 \\ g_{10} = 36 \\ g_{11} = 204 \end{gathered} \qquad (12)$$

$$\begin{gathered} F_0 = 51 \\ F_1 = 288 \end{gathered} \qquad (13)$$

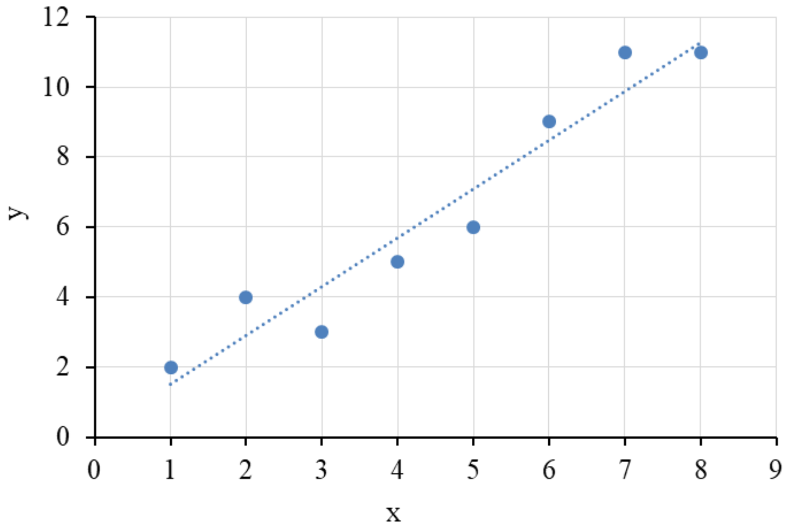
W rezultacie otrzymujemy układ równań w postaci:

$$\begin{bmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ 288 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Rozwiązanie układu równań (14) jest następujące:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.107 \\ a_1 &= 1.392 \end{aligned} \tag{15}$$

Wykres przebiegu funkcji aproksymującej przedstawiono na Rys. 1.



Rys. 1. Wykres liniowej funkcji aproksymującej

Zad 1. Napisz program, który będzie obliczał współczynniki dla wielomianu aproksymującego dowolnego stopnia. Wymagania:

a) Stopień wielomianu, liczba węzłów, węzły aproksymacji, wartości aproksymowanej funkcji i funkcja wagowa są podawane w kodzie programu.
b) Układ równań rozwiązać metodą Gaussa
c) W wyniku działania program wypisuje:
    - Liczbę węzłów
    - Współczynniki wielomianu aproksymującego
    - Podane węzły aproksymacji i wartości w węzłach oraz obliczone wartości funkcji aproksymującej w węzłach aproksymacji

Przeprowadź aproksymację za pomocą funkcji liniowej dla punktów podanych w przykładzie.

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-9 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-9).