



Geometria Obliczeniowa

Tesselacje

Prof. dr hab. inż. **Łukasz Madej**
Mgr inż. **Mateusz Mojżeszko**
Katedra Informatyki Stosowanej i Modelowania
Wydział Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej

Budynek B5
p. 716
lmadej@agh.edu.pl
home.agh.edu.pl/lmadej





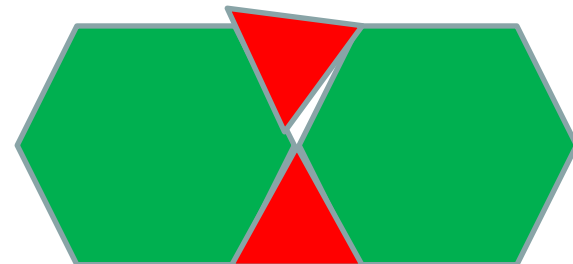
Tesselacja, zwana również parkietażem, jest to pokrywanie danej płaszczyzny figurami geometrycznymi.

Warunki jakie muszą zająć żeby mówić o porawnym parkietażu to:

- Figury nie mogą na siebie zachodzić



- Figury nie mogą pozostawiać luk





W przestrzeni euklidesowej rozróżniamy 4 główne rodzaje parkietażu:

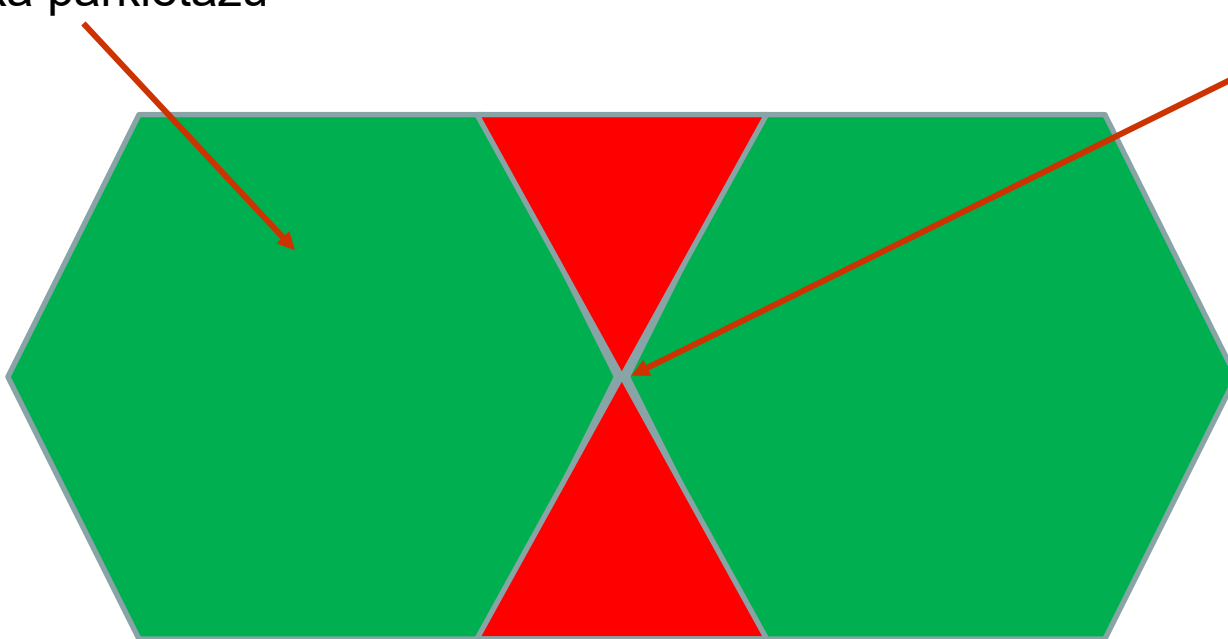
- **Parkietaże foremne** - są zbudowane jedynie z wielokątów foremnych (*wszystkie kąty wewnętrzne równe i wszystkie boki równej długości*).
 - Parkietaże foremne są zarazem regularnymi.
 - Ze względu na szczególne właściwości takich wielokątów, istnieją tylko 3 parkietaże foremne.
- **Parkietaże regularne** - przy każdym wierzchołku spotyka się taki sam zestaw figur, nie muszą one być w tej samej pozycji, jednak odpowiadające sobie figury muszą być podobne. Parkietaże regularne mogą być zarówno okresowe jak i nieokresowe.
- **Parkietaże okresowe** – można w nich znaleźć okres przesunięcia przy jakim wzór na płaszczyźnie będzie się pokrywał.
- **Parkietaże nieokresowe** – nie można znaleźć okresu przy jakim wzór na płaszczyźnie będzie się pokrywał.





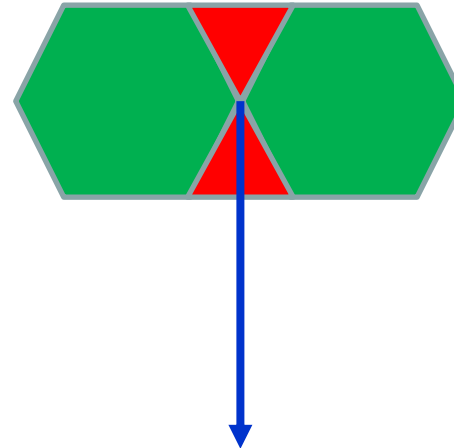
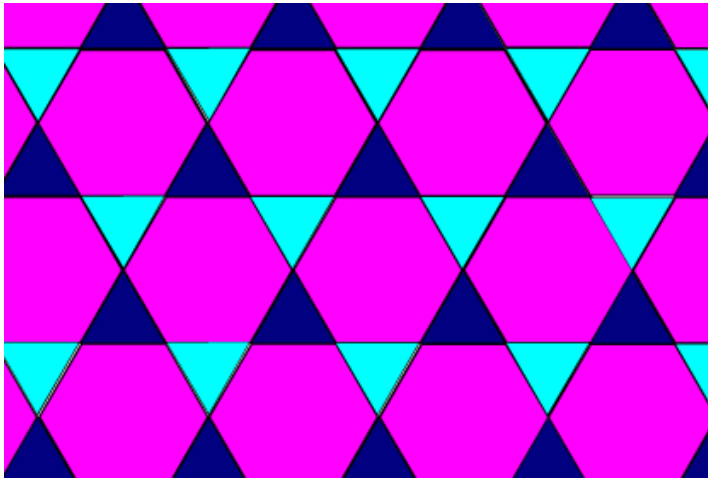
Płytki parkietu

Wierzchołek parkietu





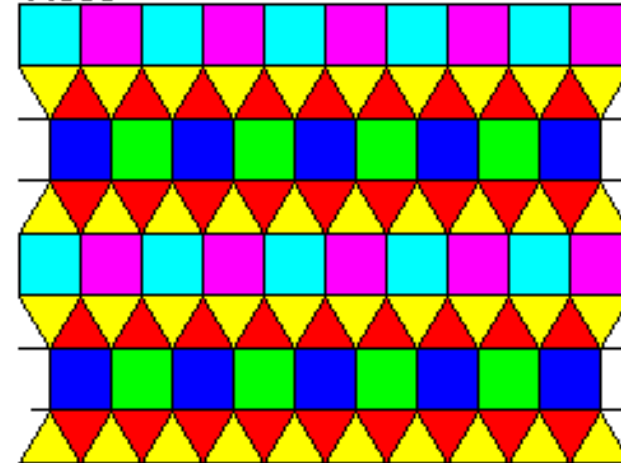
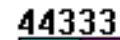
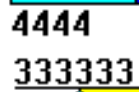
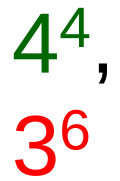
W wypadku gdy tesselacja jest stworzona wyłącznie z wielokątów foremnych określona jest poprzez zapis jakie figury spotykają się przy wierzchołkach.



2 x sześciokąty
2 x trójkąty

→ $6^2, 3^2$

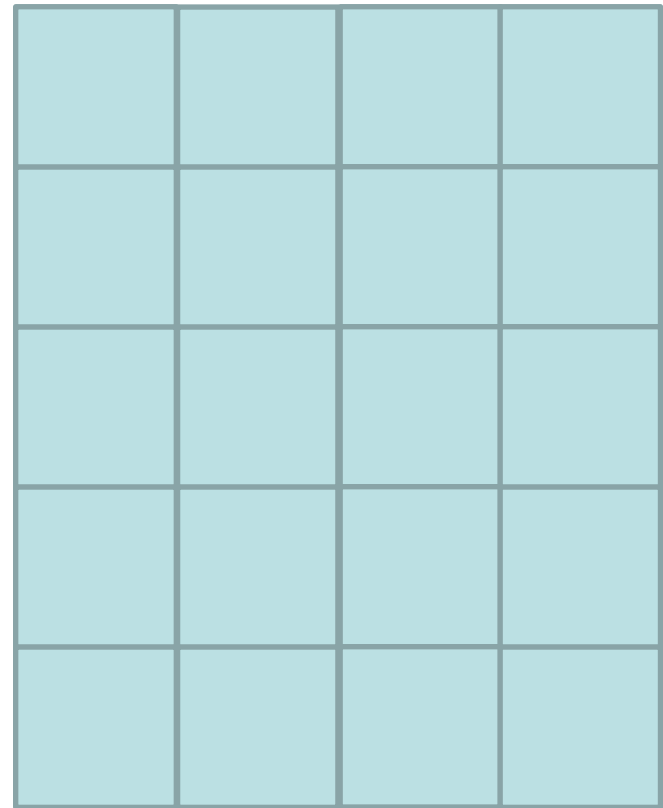
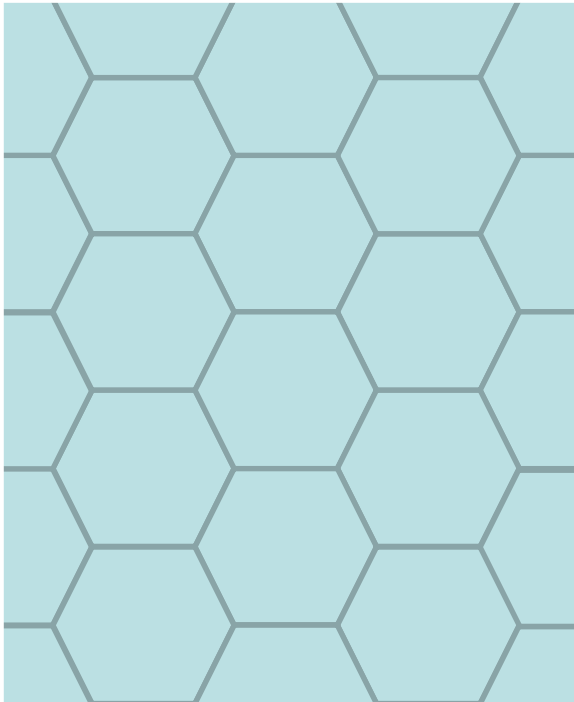


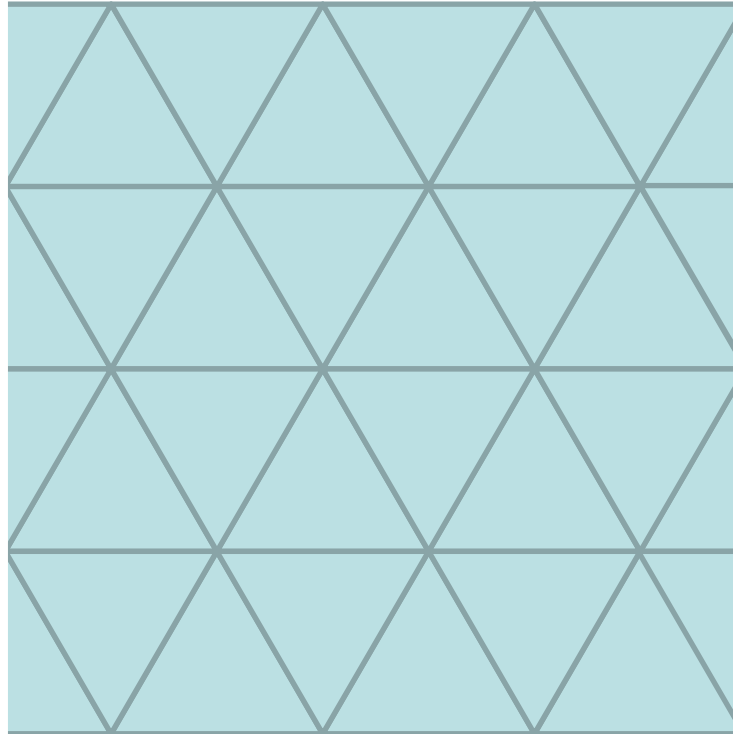

$$6^3, 4^2, 3^3$$



Parkietaże foremne

zbudowane jedynie z wielokątów foremnych

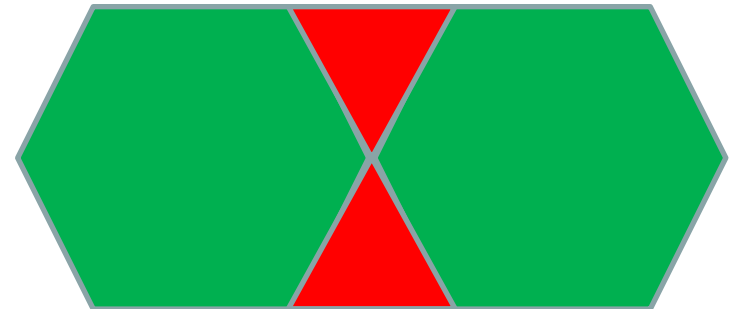
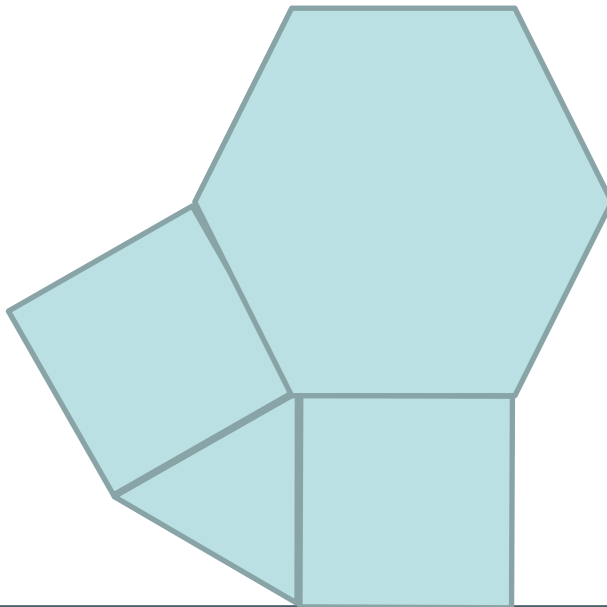
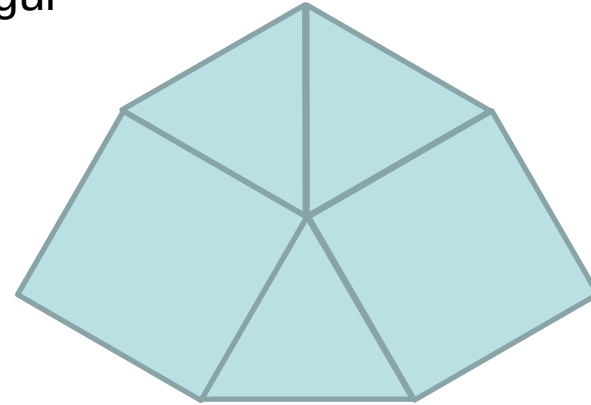
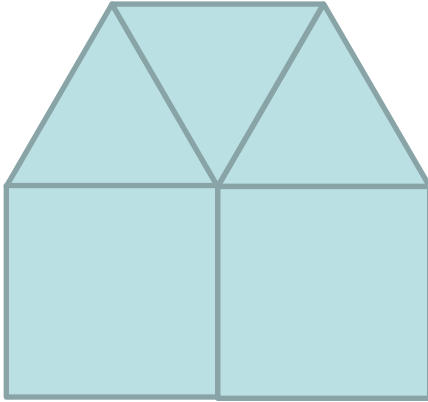


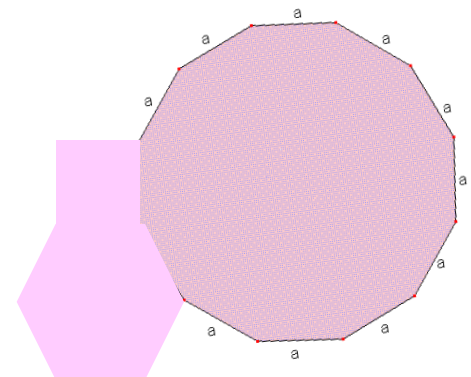
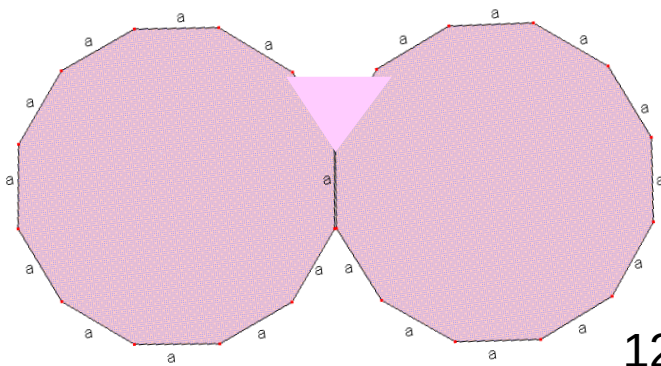
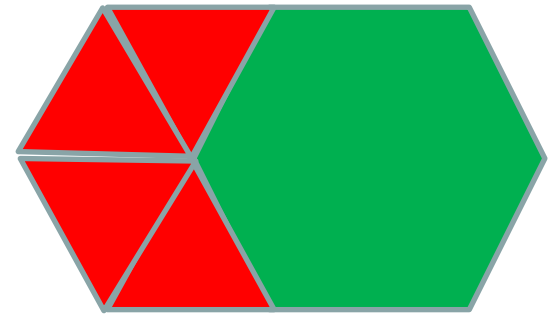
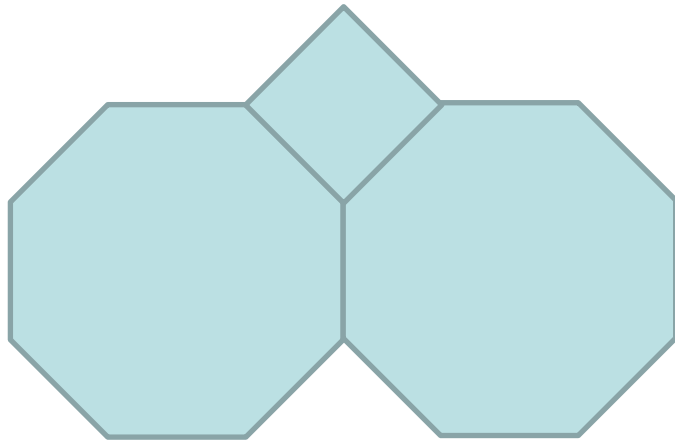




Parkietaże regularne

przy każdym wierzchołku spotyka się taki sam zestaw figur



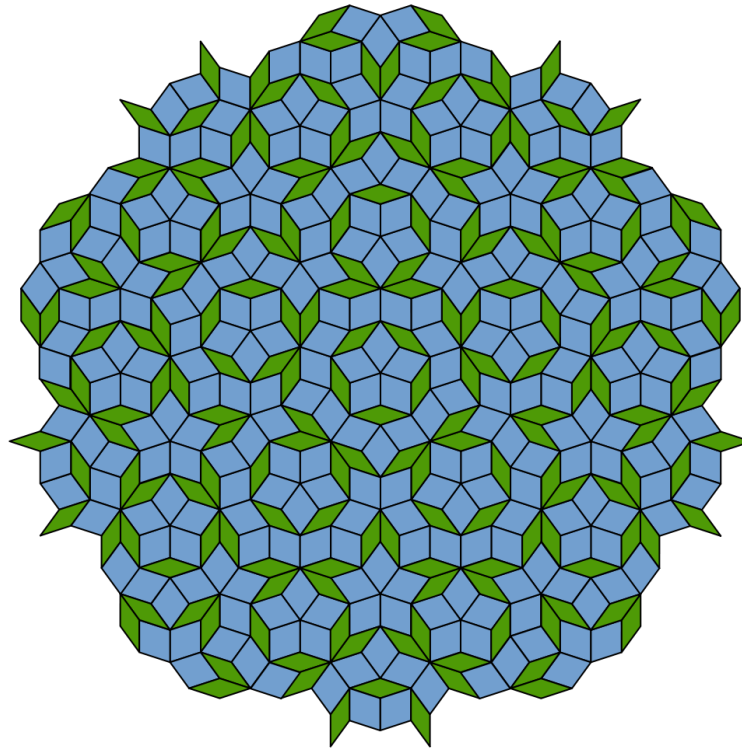


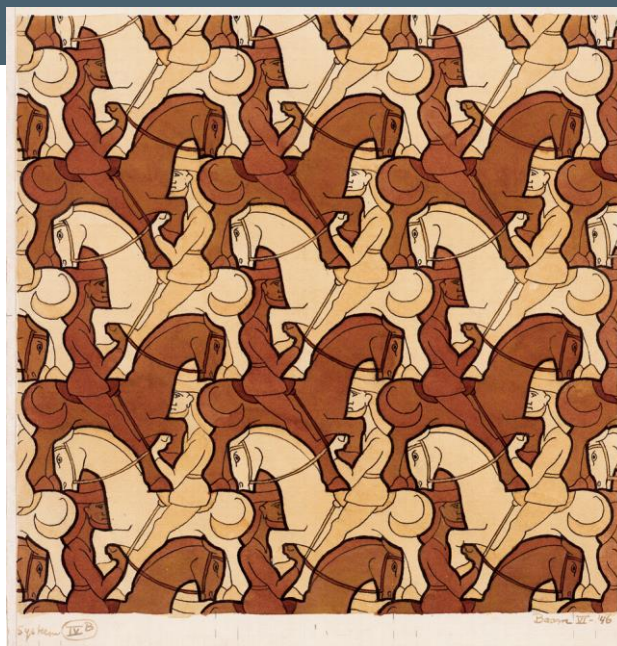


Parkietaże nieokresowe

Parkietaże nieokresowe, - nie ma żadnego okresu przesunięcia dowolnego zestawu figur po którym wzór stale by się powtarzał.

parkietaż Penrose'a





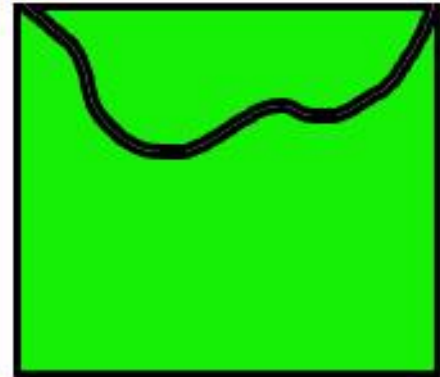




Tesselacja dowolnym kształtem



Jako kształt bazowy został przyjęty prostokąt.

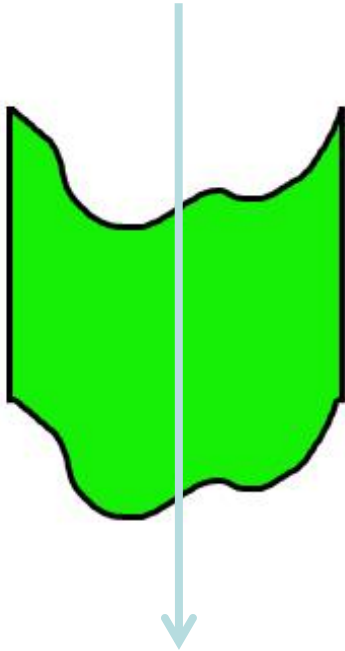


Z górnej części wycięto losowy kształt.

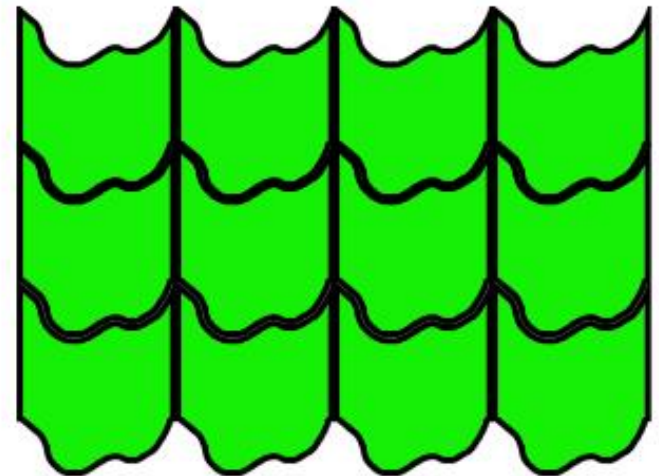




Tesselacja dowolnym kształtem



Wycięty kształt przesunięto na dół.



Poprzez kopiowanie i dołączanie kształtów jest teraz możliwa teselacja przestrzeni.





Diagram Woronoja (teselacja Dirichleta)



Georgij Feodosjewicz Woronoj

28 kwiecień 1868
(20 listopad 1908)

Matematyk rosyjski ukraińskiego pochodzenia. Pracował m.in. na Warszawskim Instytucie Politechnicznym Cesarza Mikołaja II

Nauczyciel



Boris Delaunay





Diagram Woronoja (Voronoi) (teselacja Dirichleta)

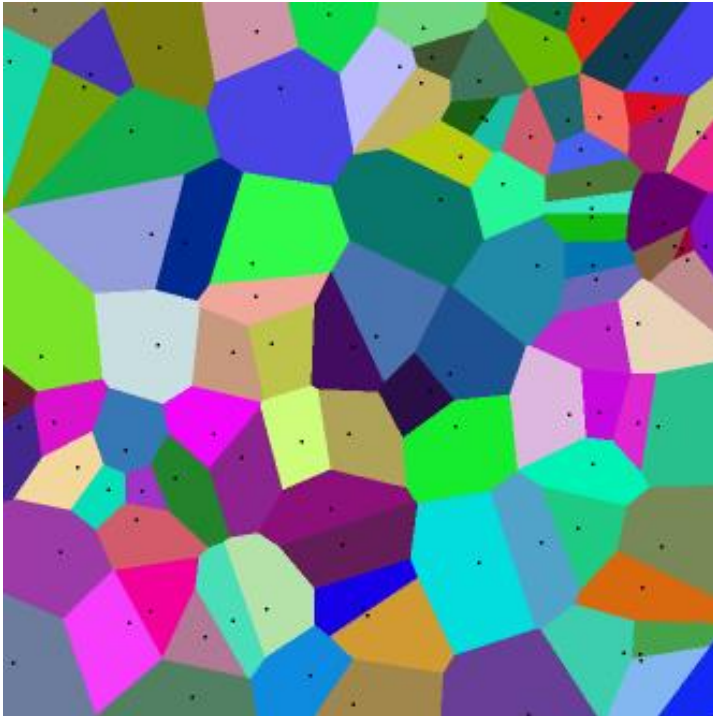
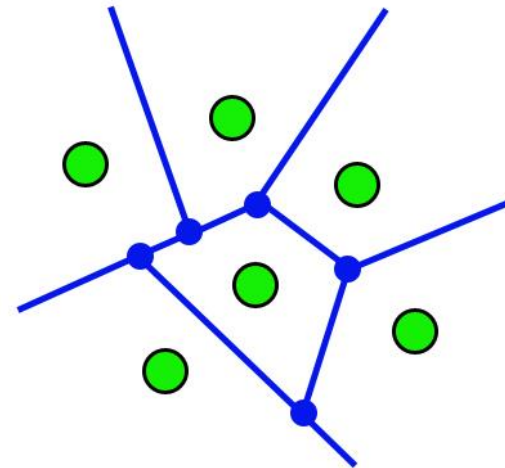


Diagram Voronoi reprezentuje region wpływów wokół każdego z punktów początkowych

Ideą algorytmu jest dekompozycja przestrzeni wokół każdego punktu początkowego ze zbioru S :

$$S = \{P_1, \dots, P_n\},$$

w taki sposób, że wszystkie punkty z rejonu otaczającego punkt P_i są bliżej niego, niż jakiegokolwiek innego punktu ze zbioru S



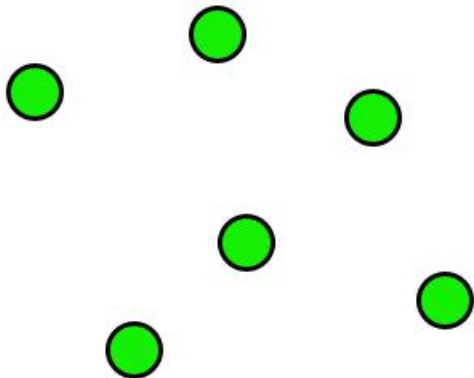


Brut Force

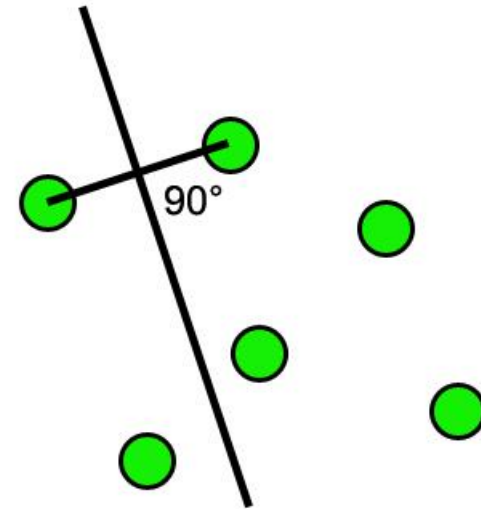
Wokół poszczególnych punktów początkowych tworzone są wielokąty.

Kształt i rozmiar danego wielokąta uzależniony jest od położenia punktów sąsiadujących z rozpatrywanym punktem.

Każda krawędź wieloboku jest tak umiejscowiona, aby należała do symetrycznych odcinków łączących dany punkt z sąsiadami.

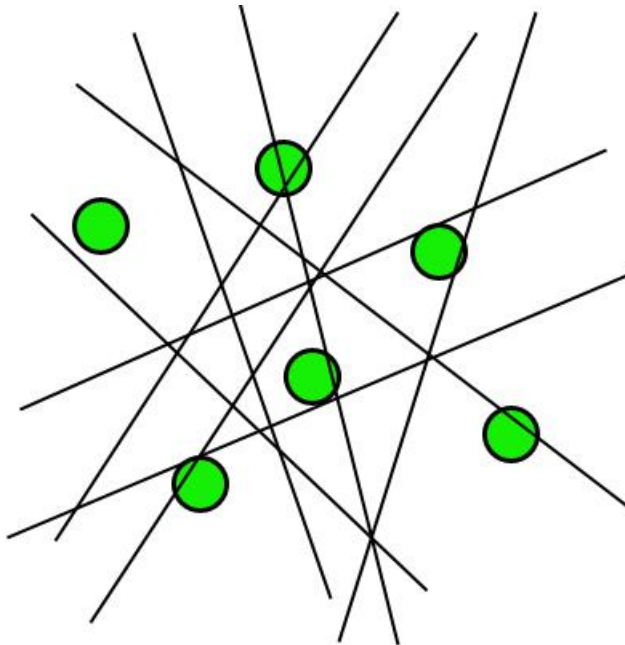


Zbiór punktów wejściowych.

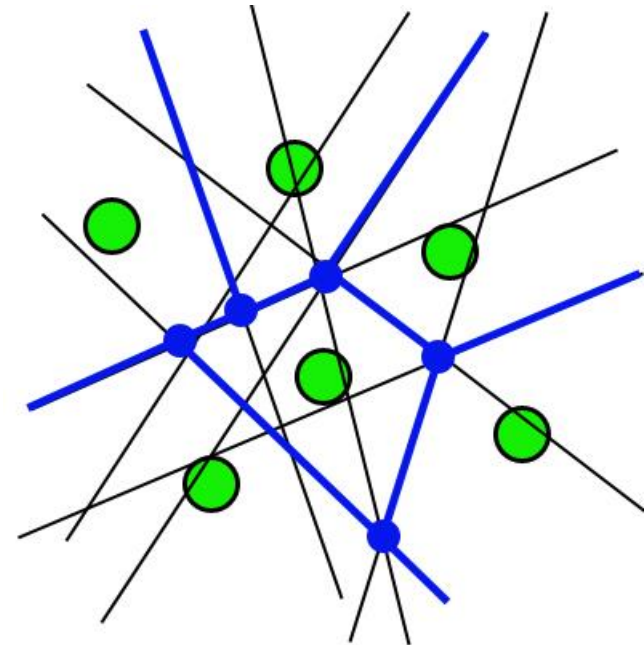


Miedzy każdą parą punktów prowadzona jest linia, a następnie prostopadła do niej prosta przechodząca przez jej środek.





- Proces jest powtarzany dla każdej pary punktów.



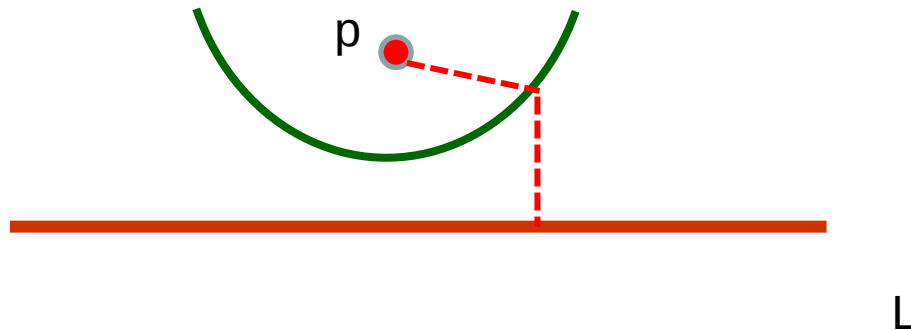
- Otrzymane linie przecięć pozwalają na narysowanie diagramu.



Algorytm Fortune

Ideą algorytmu jest ruch prostej, zwanej miotłą, z jednego krańca płaszczyzny do drugiego.

Kiedy miotła minie pozycję jednego z punktów początkowych, następuje tzw. **zdarzenie punktowe** - tworzona jest nowa parabola, której kształt zmienia się z każdym przesunięciem miotły.



Punkty na paraboli są równo odległe od p i L





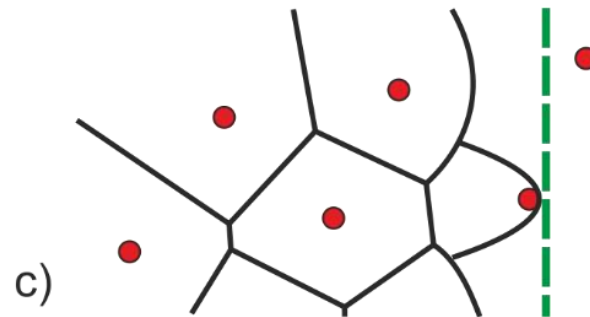
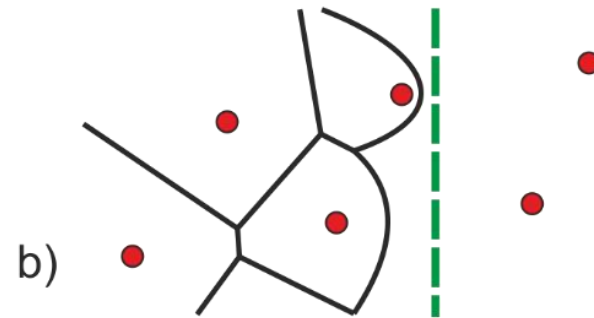
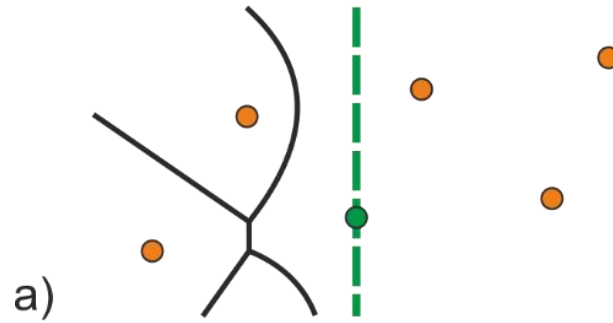
Algorytm zakłada, że wierzchołek paraboli znajduje się w połowie odległości pomiędzy danym punktem a położeniem „miotły”, przesuwając się wraz z jej ruchem.

Procedura tworzenia się paraboli powtarzana jest cyklicznie za każdym razem gdy „miotła” napotka na kolejny punkt.

Kolejne nowo tworzone parabole przecinają się tworząc tym samym układ dwusiecznych. W sytuacji kiedy trzy dwusieczne się przecinają występuje tzw. **zdarzenie okręgowe**, po którym powstają brzegi wieloboków Woronoja.

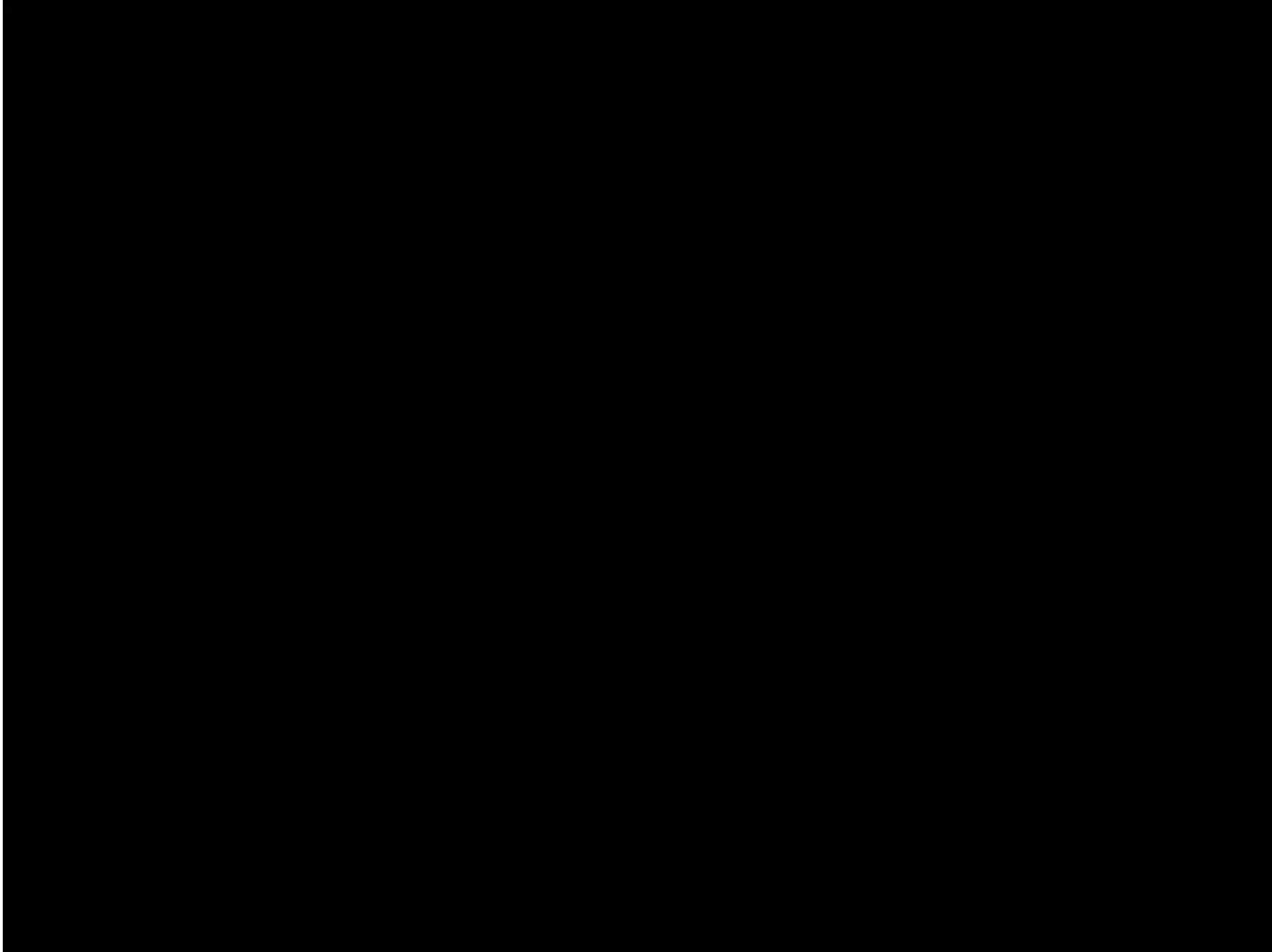
Po połączeniu się wszystkich dwusiecznych i przejściu „miotły” przez całą analizowaną przestrzeń uzyskiwany jest pełen diagram Woronoja rozpięty na analizowanych punktach w przestrzeni obliczeniowej





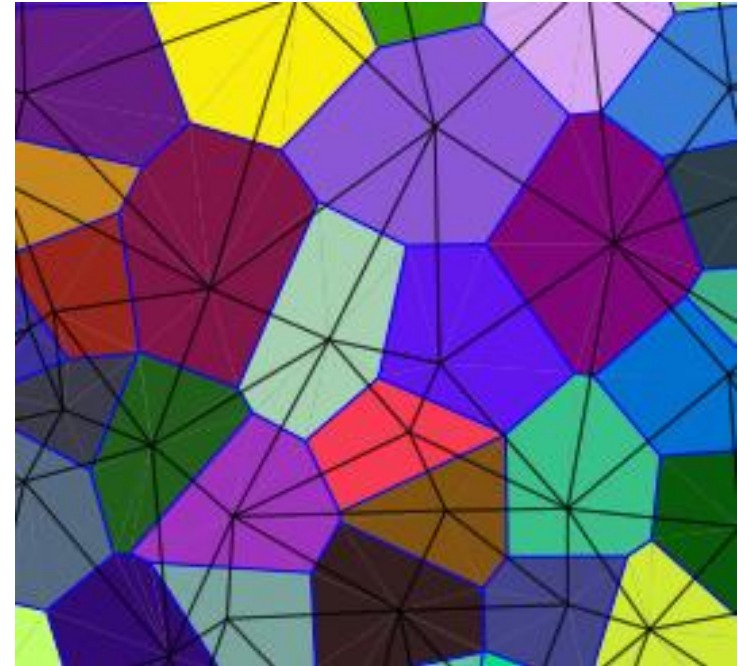
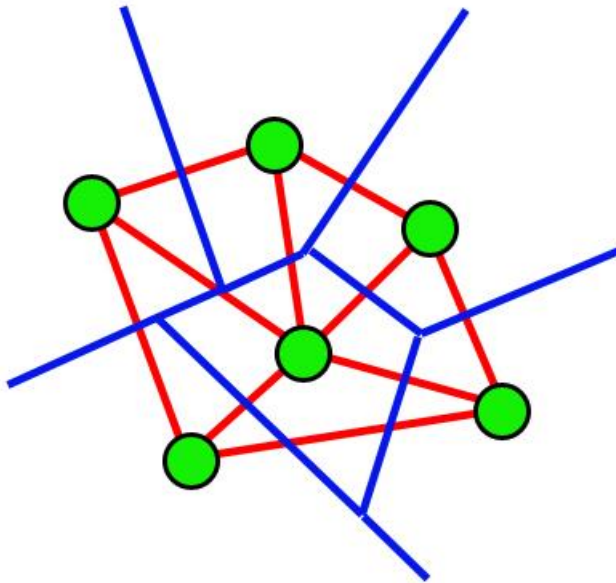


<https://www.youtube.com/watch?v=k2P9yWSMaXE>





Traingulacja Delaunay



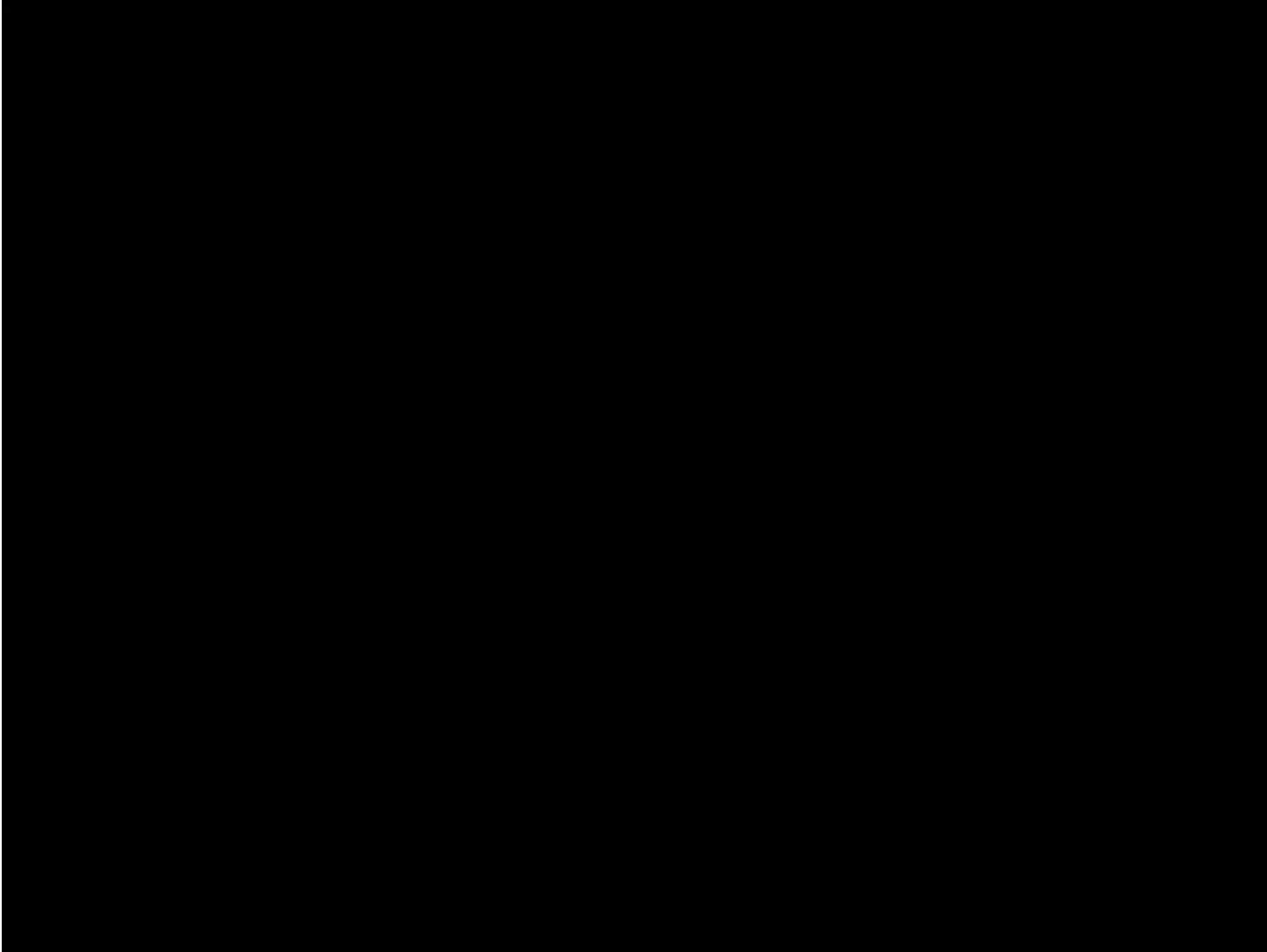
Triangulacja Delaunay jest grafem dualnym do diagramu Voronoi.

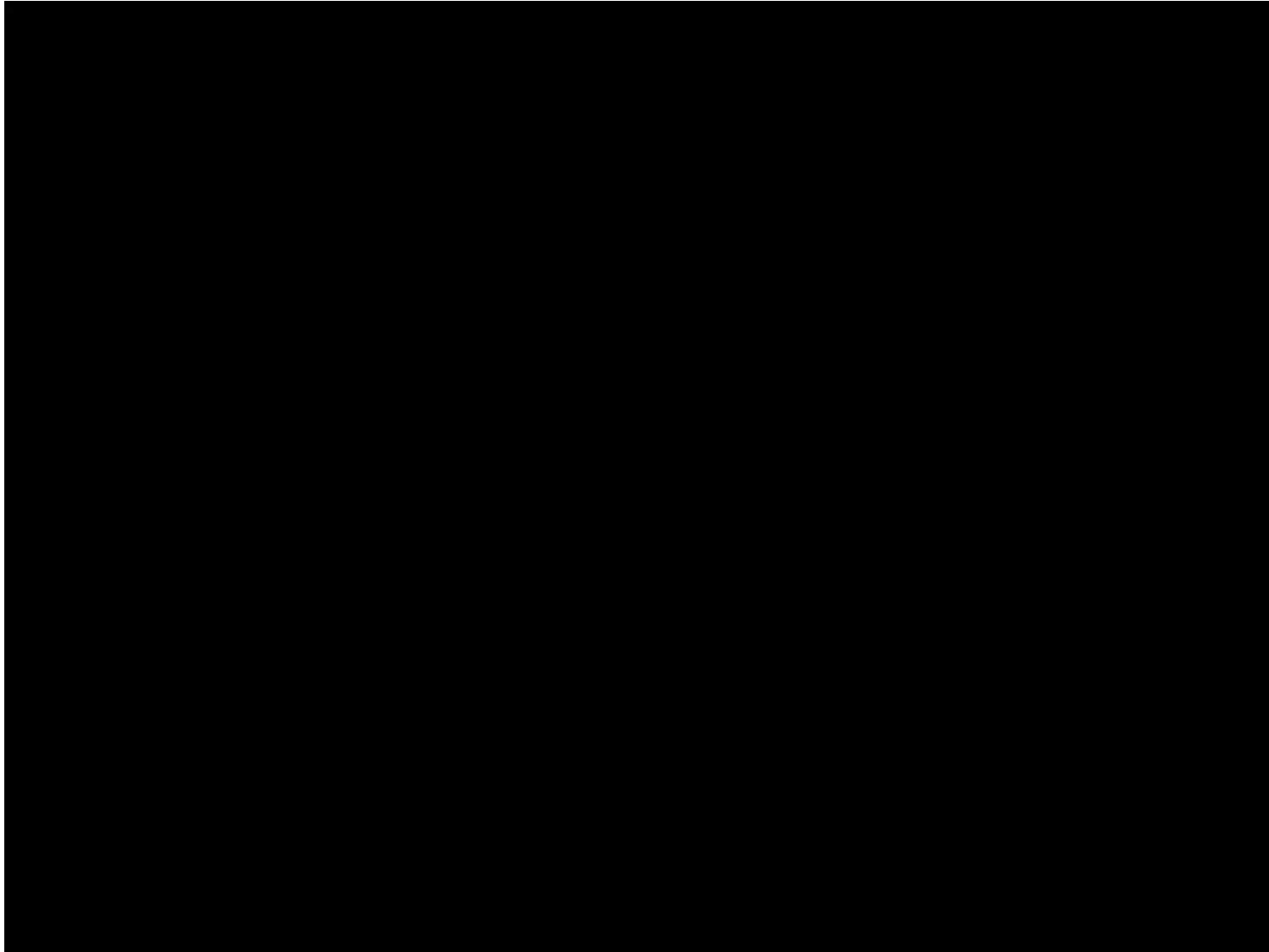
Krawędzie łączą środki okręgów opisanych na trójkątach. Środki okręgów stanowią wierzchołki diagramu Voronoia.





<http://www.raymondhill.net/voronoi/rhill-voronoi-demo2.html>

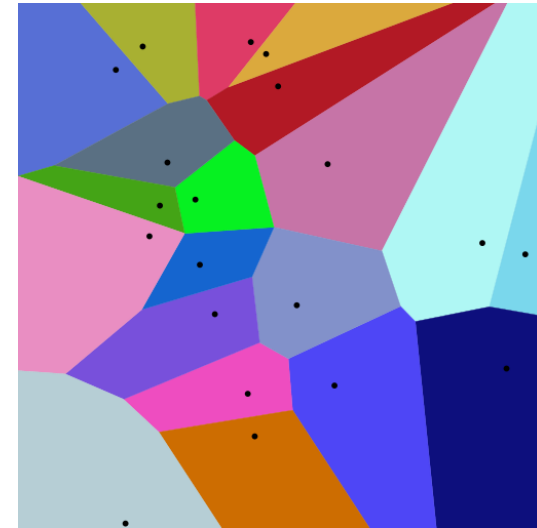
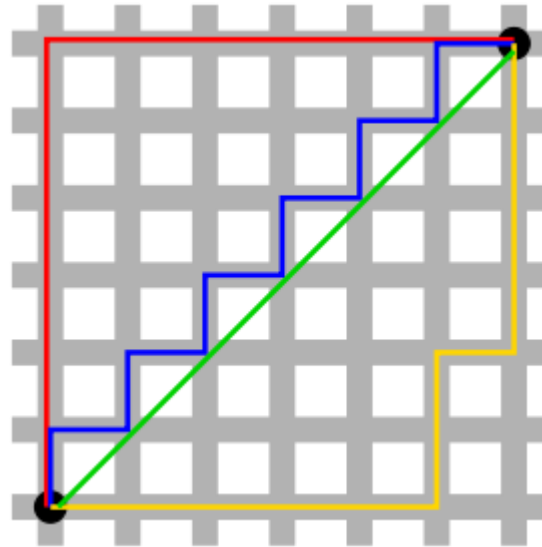






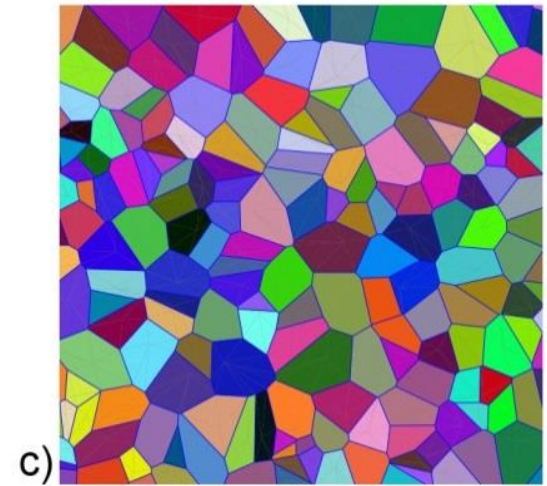
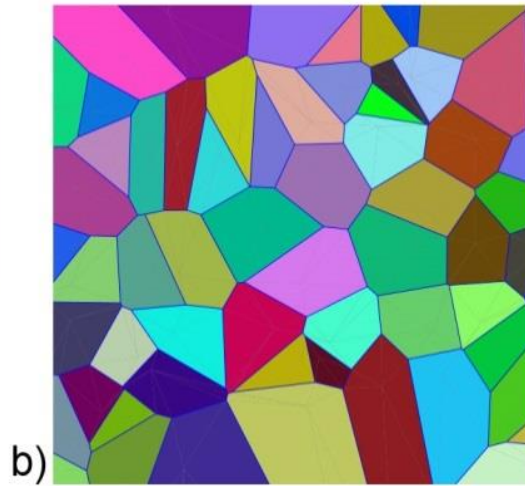
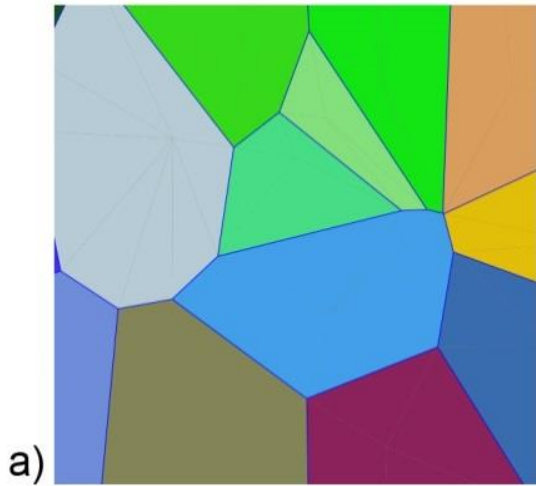
Metryka Manhattan

Metryka euklidesowa - odległość między dwiema obserwacjami. Obliczana jako pierwiastek kwadratowy sumy we wszystkich wymiarach, różnic pomiędzy wartościami podniesionymi do kwadratu.



Metryka Manhattan - odległości jest wyliczana z bezwzględnych różnic pomiędzy wartościami.





Metoda CPVT (ang. Controlled Poisson Voronoi Tessellation), daje możliwość kontrolowanego rozłożenia punktów początkowych. W skrajnym przypadku umożliwia uzyskanie struktury plastra miodu.

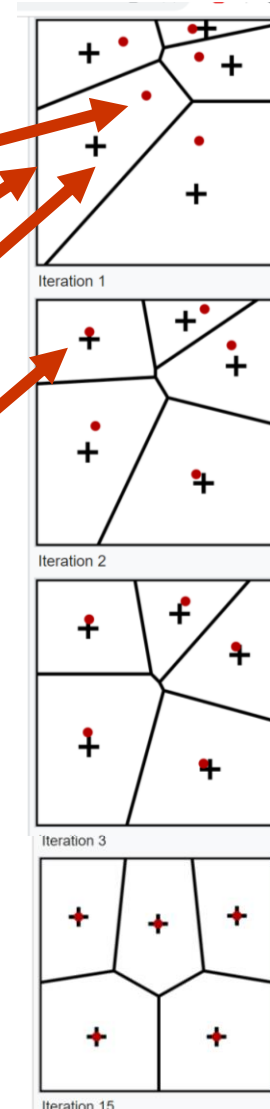


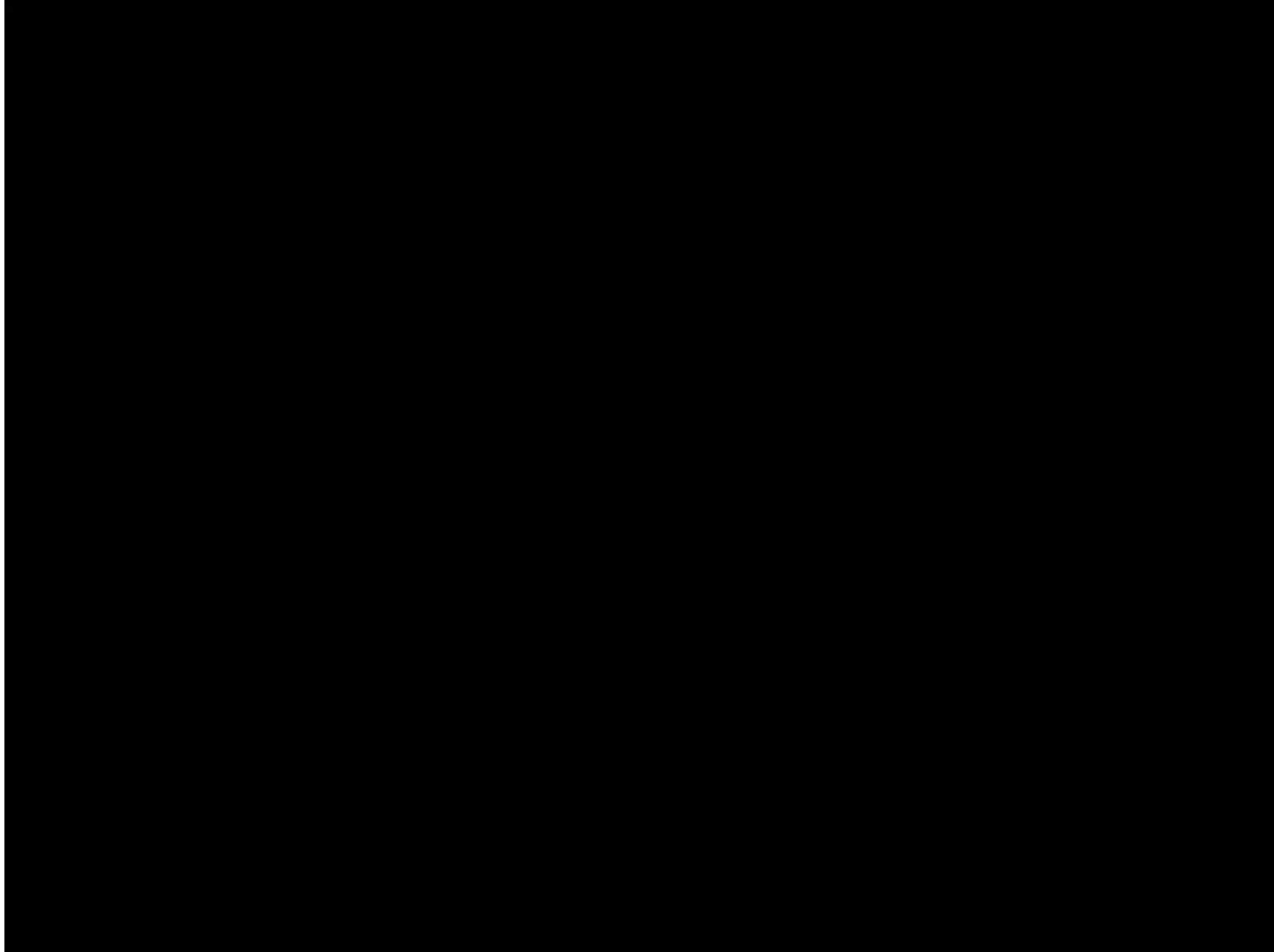


Centroidal Voronoi tessellation

Algorytm Lloyd'a

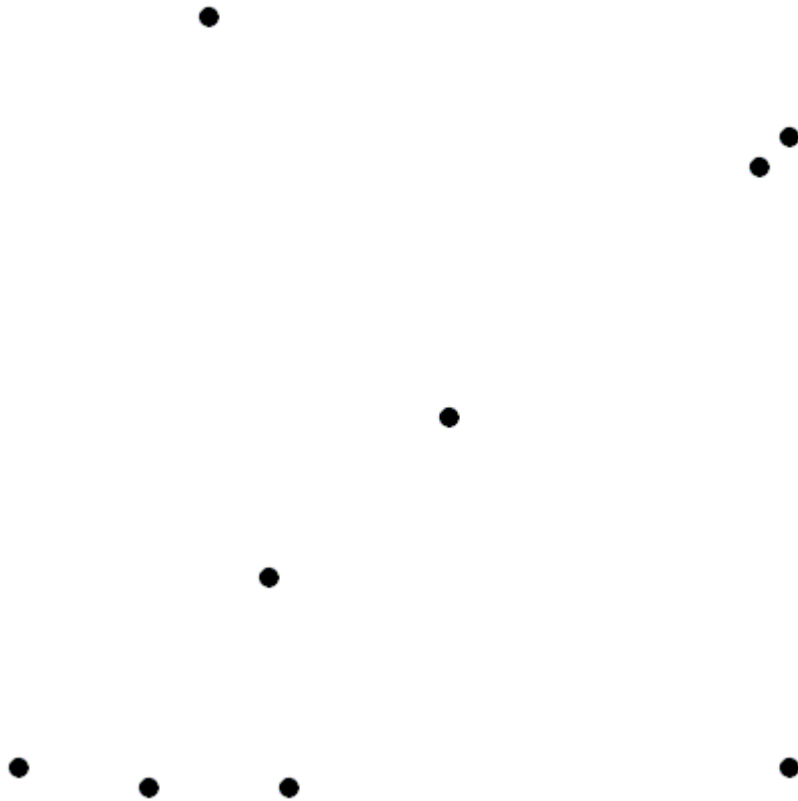
1. Wstaw zbiór punktów P w obszar domeny obliczeniowej np.:
 1. Wstawianie losowe,
 2. Wstawianie na granicach elementów w siatce.
3. Określ tesselacje Voronoi dla punktów ze zbioru P
4. Oblicz położenie środków ciężkości uzyskanych obszarów Voronoi
5. Przesuń punkty ze zbioru P w środki ciężkości obszarów Voronoi
6. Wyznacz tesselacje Voronoi
7. Powtarzaj do momentu kiedy punkty ze zbioru P nie mogą ulec przesunięciu







https://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi_diagram





Dziękuję za uwagę

