



# Geometria Obliczeniowa

Dr hab. inż. **Łukasz Madej**, prof. AGH

Mgr inż. **Daniel Bachniak**

Katedra Informatyki Stosowanej i Modelowania  
Wydział Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej

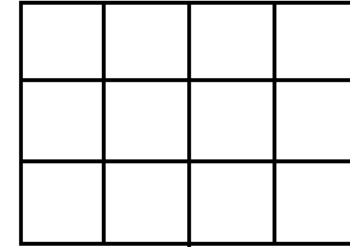
Budynek B5  
p. 716

**[lmadej@agh.edu.pl](mailto:lmadej@agh.edu.pl)**  
[home.agh.edu.pl/lmadej](http://home.agh.edu.pl/lmadej)

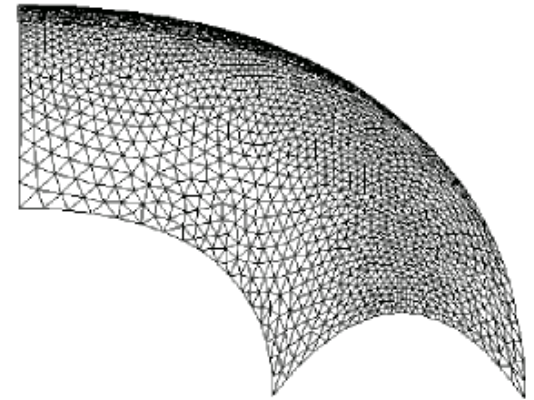


## Przypomnienie

**Siatki Strukturalne** - to siatki o regularnym kształcie elementów

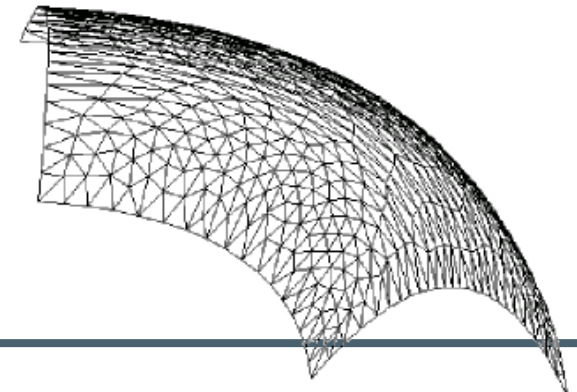


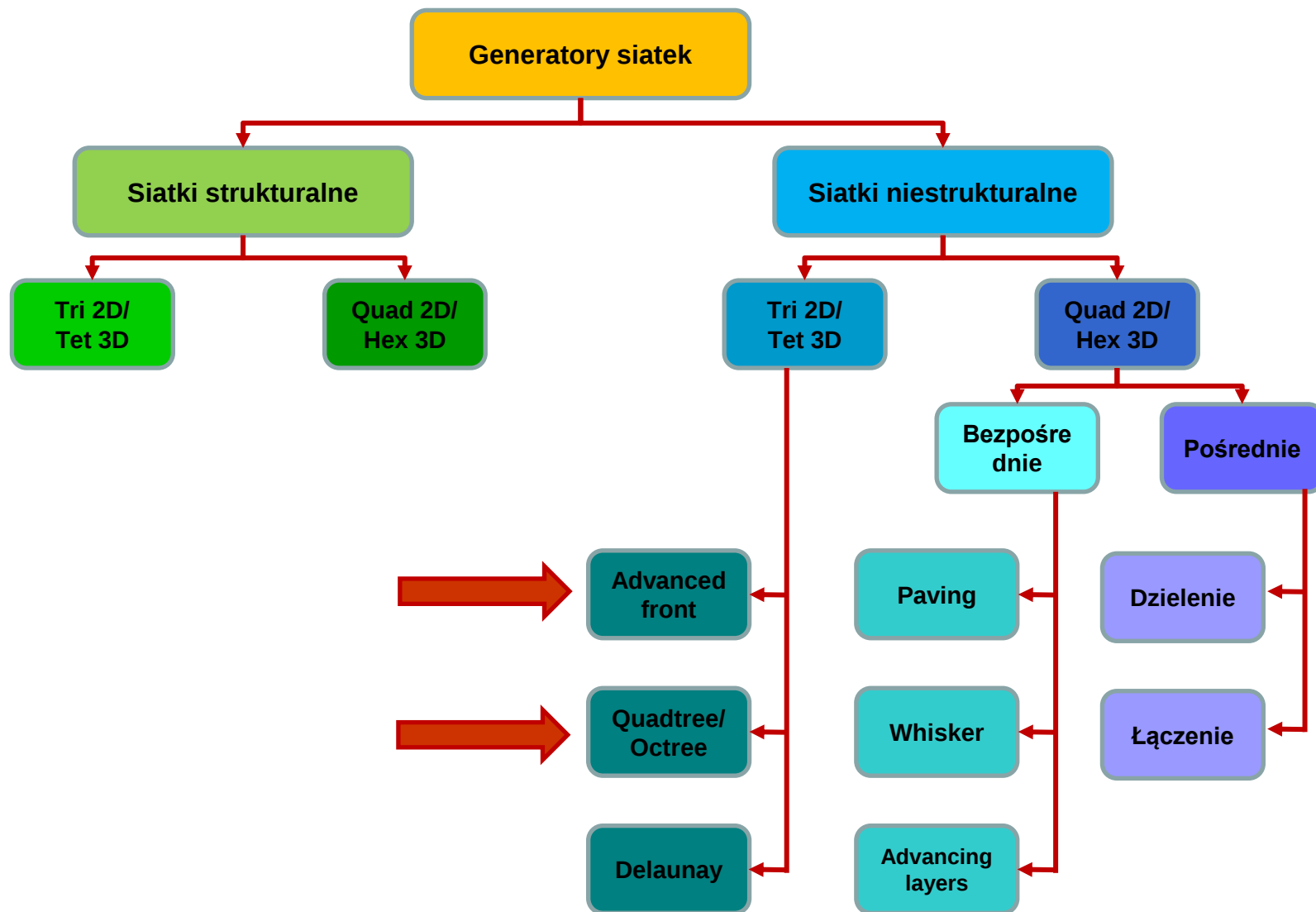
**Siatki Niestrukuralne** - to siatki o nieregularnym kształcie elementów



**Siatki Izotropowe** - to siatka której elementy są względnie jednorodne we wszystkich kierunkach

**Siatki Anizotropowe** - to siatka której elementy są rozciągnięte w określonych kierunkach w określonym stopniu





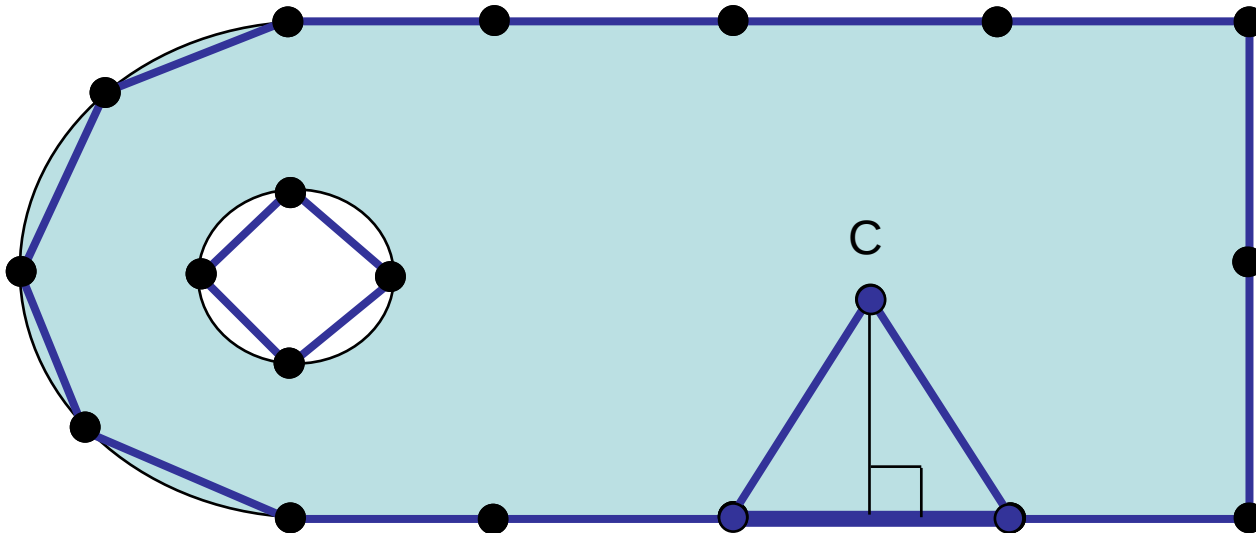


## Advancing Front

Zasada działania tej metody jest oparta o tzw. front utworzony z punktów znajdujących się na dyskretyzowanej granicy obszaru.

Odpowiednio połączone punkty tworzą boki, więc ciągła granica obszaru jest zastąpiona zbiorem boków (odcinków w przypadku 2d i np. trójkątów w 3d) tworząc zamkniętą pętlę - **front**.

Elementy budowane są zgodnie z założonym kierunkiem w pętli na podstawie istniejącego zbioru boków i ewentualnie dodawanych punktów.

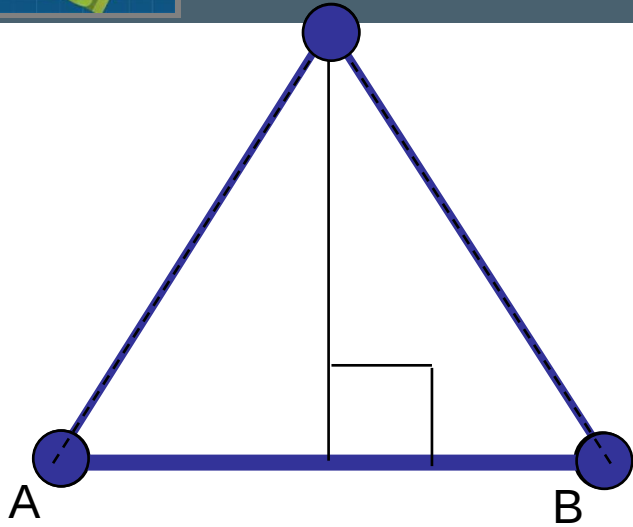


**Krok 1.** Wybierz odcinek AB leżący na froncie. A B

**Krok 2.** Wyznacz położenie punktu C, tak aby tworzył trójkąt równoboczny z odcinkiem AB



C



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

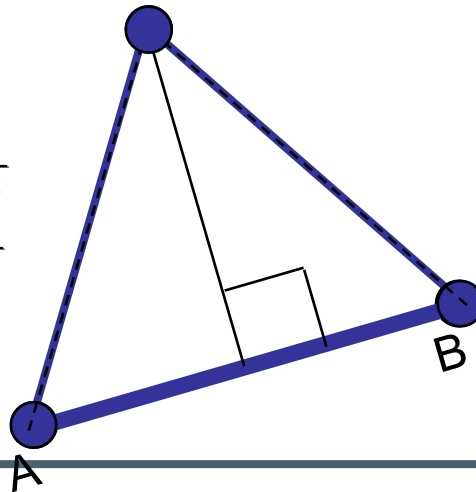


Przesunięcie<sup>C</sup> punktu o wektor długości h

$$|AB| = a$$

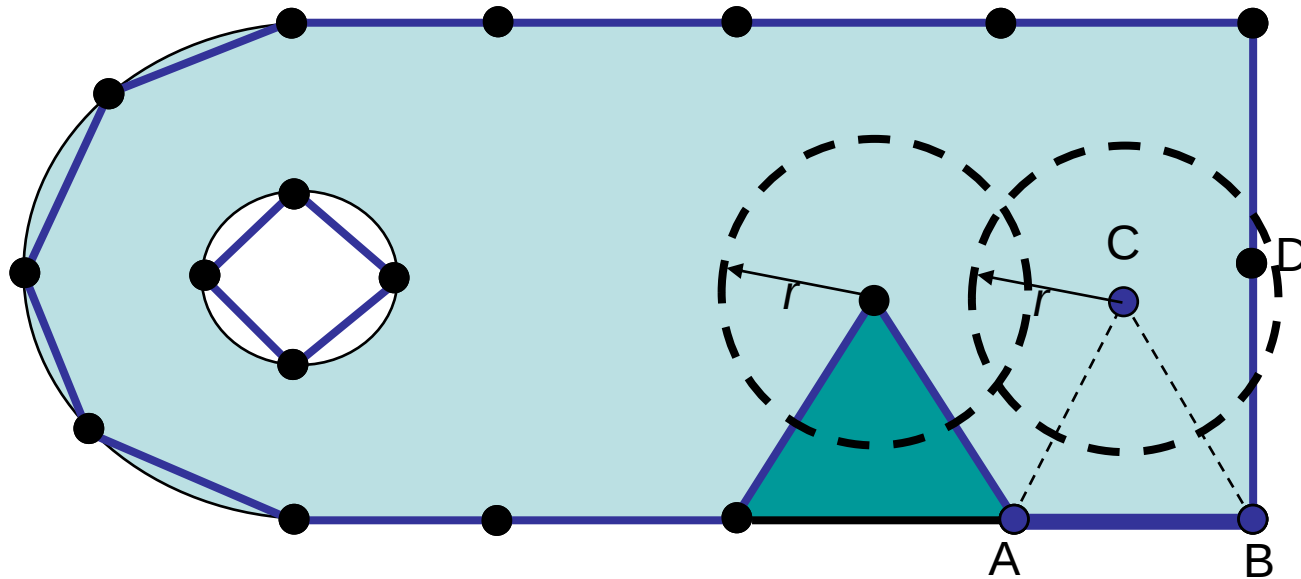
$$|AC| = a = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}$$

$$|BC| = a = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2}$$





## Advancing Front

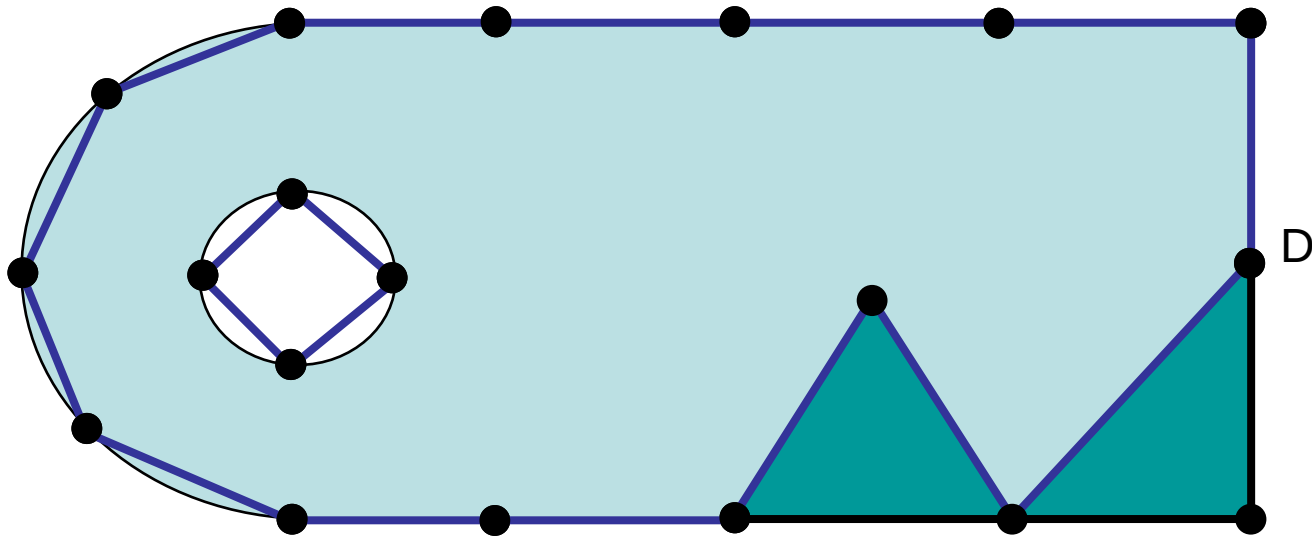


**Krok 3.** Określ czy w sąsiedztwie o promieniu  $r$  wybranego punktu C istnieje inny punkt D – jeżeli tak wybierz D zamiast C.

**Krok 4.** Zdefiniuj nowy trójkąt.



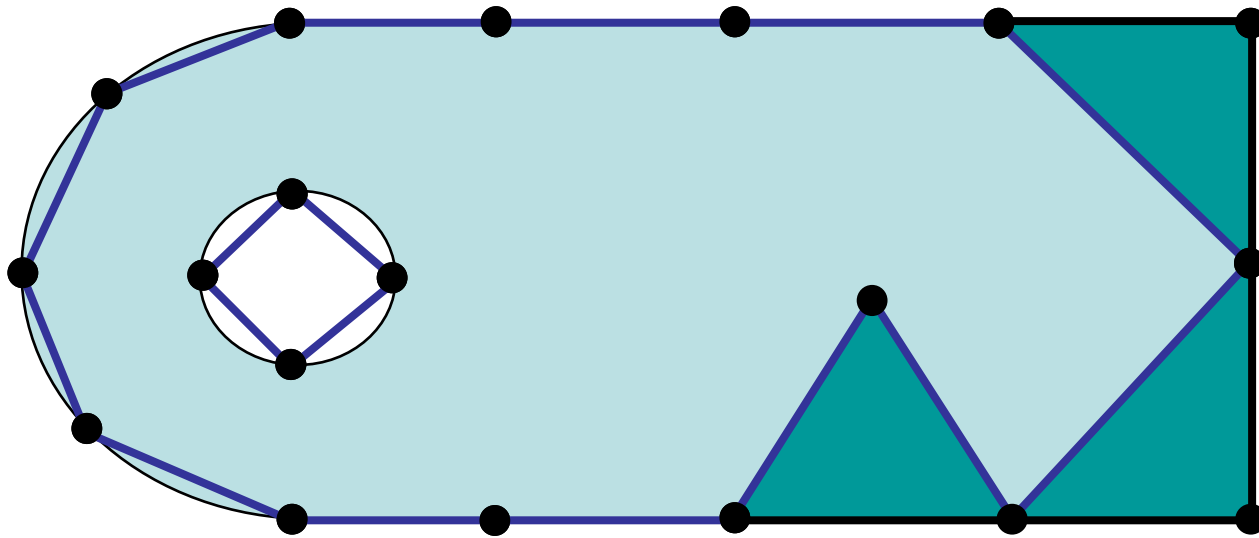
## Advancing Front



- **Lista odcinków tworzących front:** nowe odcinki na froncie są dodawane i usuwane w miarę jak tworzone są nowe trójkąty.
- Kroki algorytmu 1, 2 i 3 są wykonywane do momentu, aż lista odcinków tworzących front będzie pusta.



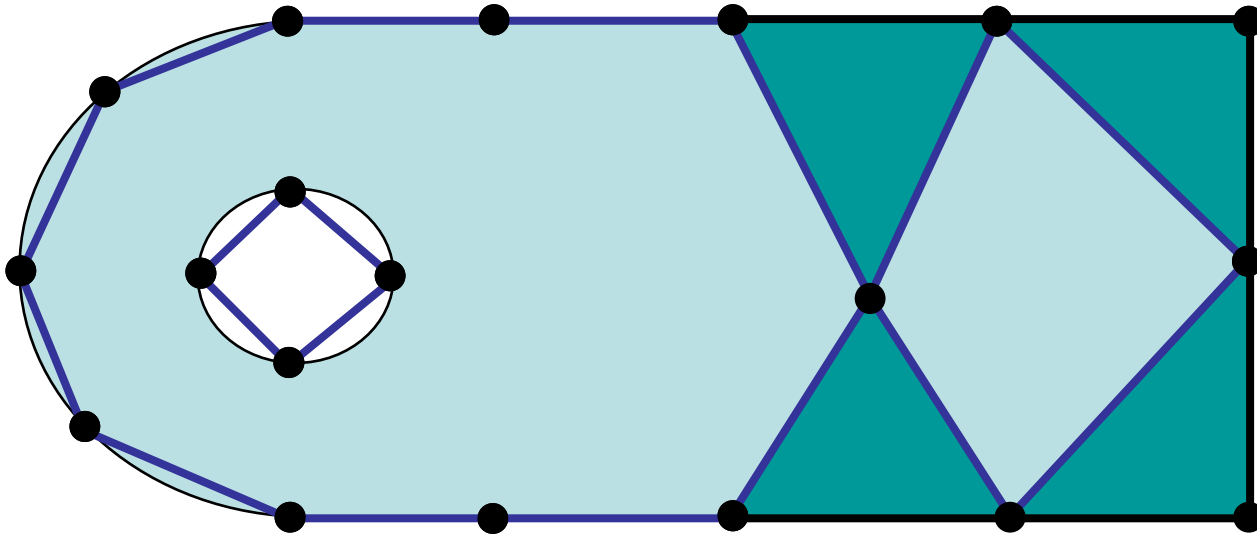
## Advancing Front



- **Lista odcinków tworzących front:** nowe odcinki na froncie są dodawane i usuwane w miarę jak tworzone są nowe trójkąty.
- Kroki algorytmu 1 i 2 są wykonywane do momentu, aż lista odcinków tworzących front będzie pusta.



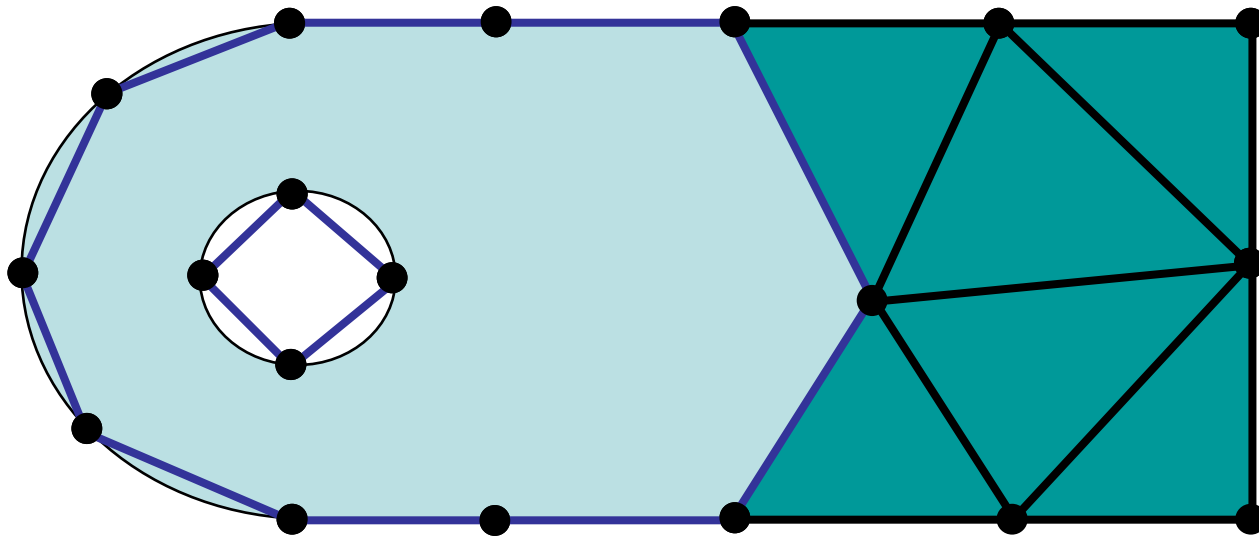
## Advancing Front



- **Lista odcinków tworzących front:** nowe odcinki na froncie są dodawane i usuwane w miarę jak tworzone są nowe trójkąty.
- Kroki algorytmu 1 i 2 są wykonywane do momentu, aż lista odcinków tworzących front będzie pusta.



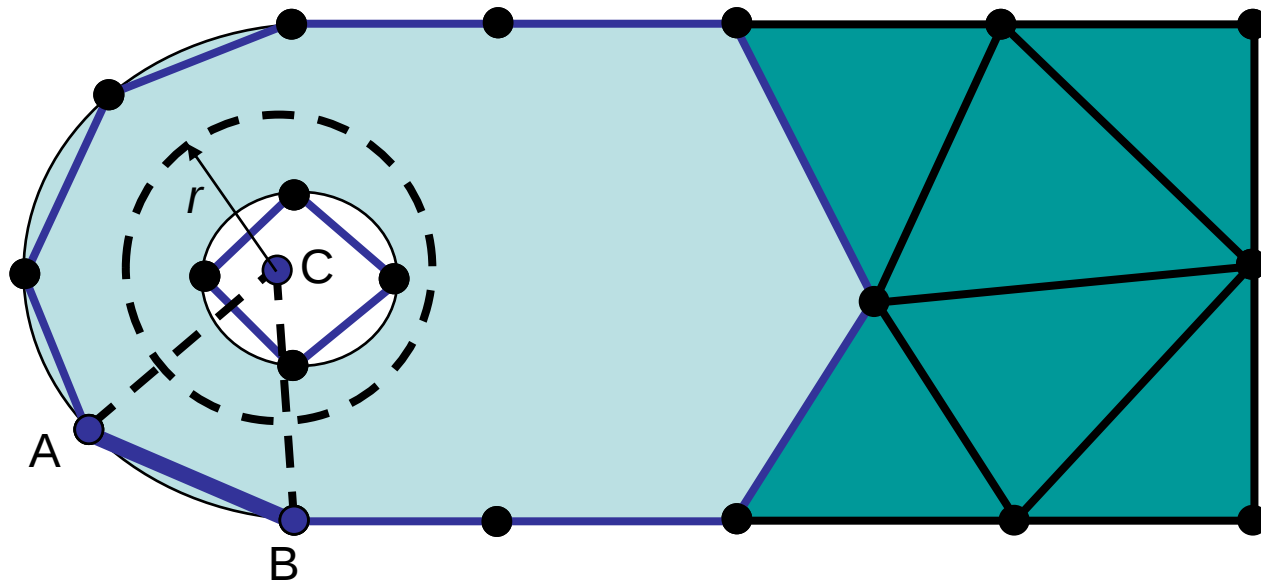
## Advancing Front



- **Lista odcinków tworzących front:** nowe odcinki na froncie są dodawane i usuwane w miarę jak tworzone są nowe trójkąty.
- Kroki algorytmu 1 i 2 są wykonywane do momentu, aż lista odcinków tworzących front będzie pusta.



## Advancing Front



- Jeżeli kilka punktów jest możliwych wybierz ten który utworzy trójkąt najbardziej zbliżony do równobocznego.

**Krok 5.** Odrzuć trójkąty przecinające front.



**Krok 1.** Wybierz odcinek AB leżący na froncie.

**Krok 2.** Wyznacz położenie punktu C, tak aby tworzył trójkąt równoboczny z odcinkiem AB

**Krok 3.** Określ czy w sąsiedztwie o promieniu  $r$  wybranego punktu C istnieje inny punkt D – jeżeli tak wybierz D zamiast C.

**Krok 4.** Zdefiniuj nowy trójkąt ABC lub ABD.

**Krok 5.** Sprawdź czy nowy trójkąt nie przecina frontu. Jeżeli tak, wybierz nowy możliwy punkt D i wróć do kroku 4.

<https://youtu.be/w04YJINztgs>





## Octree/Quadtree

**Algorytm Octree** bazuje na strukturze zwanej drzewem ósemkowym.

Nazwa pochodzi od stosowanej w grafice komputerowej struktury danych będącej drzewem, używanej do przestrzennego podziału trójwymiarowej przestrzeni na mniejsze, regularne części.

Konstrukcja drzewa ósemkowego polega na otoczeniu całości sceny trójwymiarowej sześcianem (lub prostopadłościanem), który następnie dzielony jest na osiem mniejszych, a następnie każdy z nich na osiem kolejnych itd.

Taka sama zasada może zostać z powodzeniem wykorzystana do tworzenia siatek MES.

**Algorytm QuadTree** bazuje na strukturze zwanej drzewem czwórkowym.

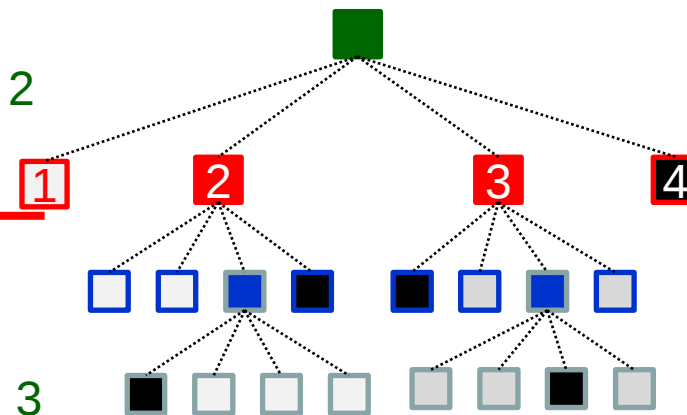
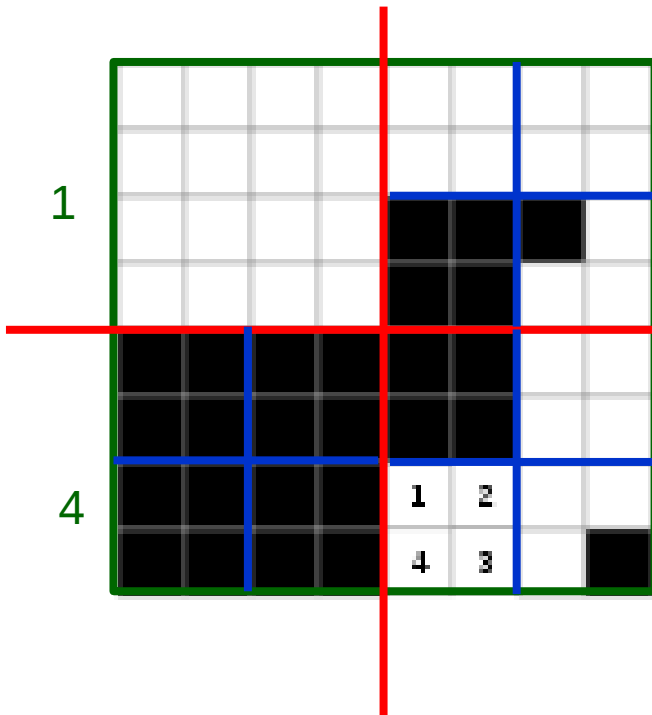


Drzewa czwórkowe/ósemkowe są hierarchicznym wariantem równomiernego podziału płaszczyzny/przestrzeni w sytuacji gdy metoda ta wykazuje duże zapotrzebowanie na pamięć.

■ pełny

□ pusty

■ częściowo wypełniony



8 x 8

4 x 4

2 x 2

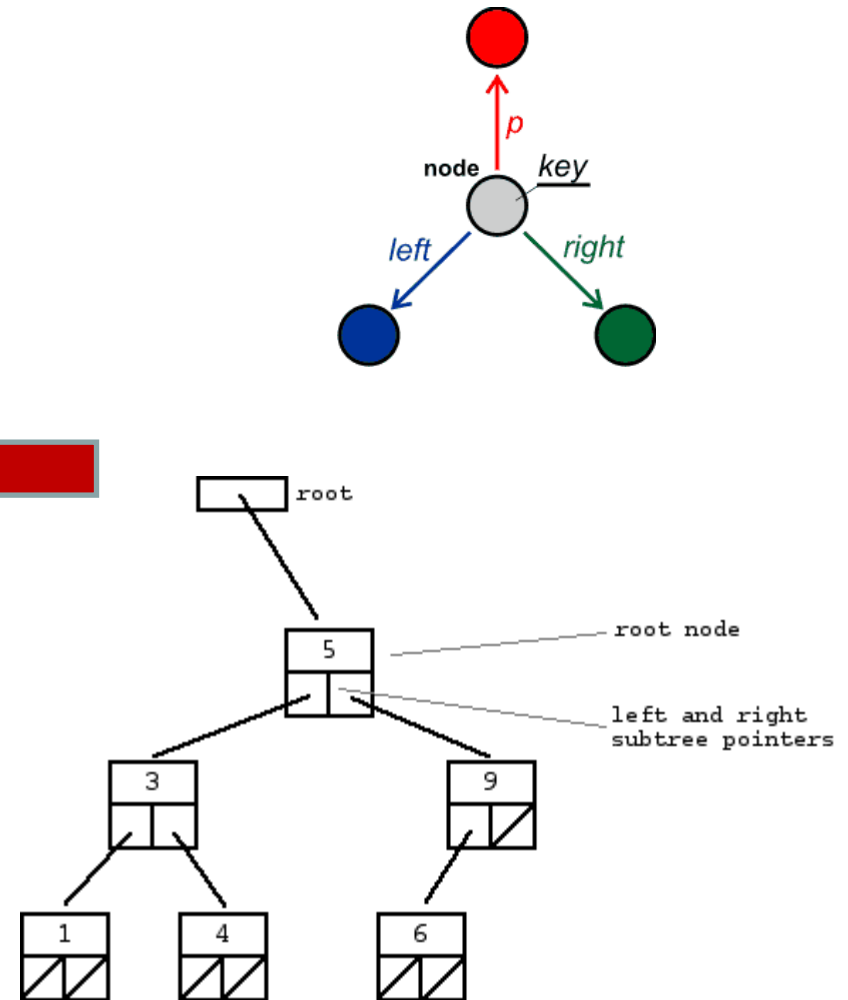
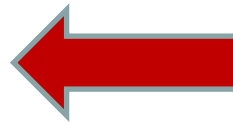
1 x 1

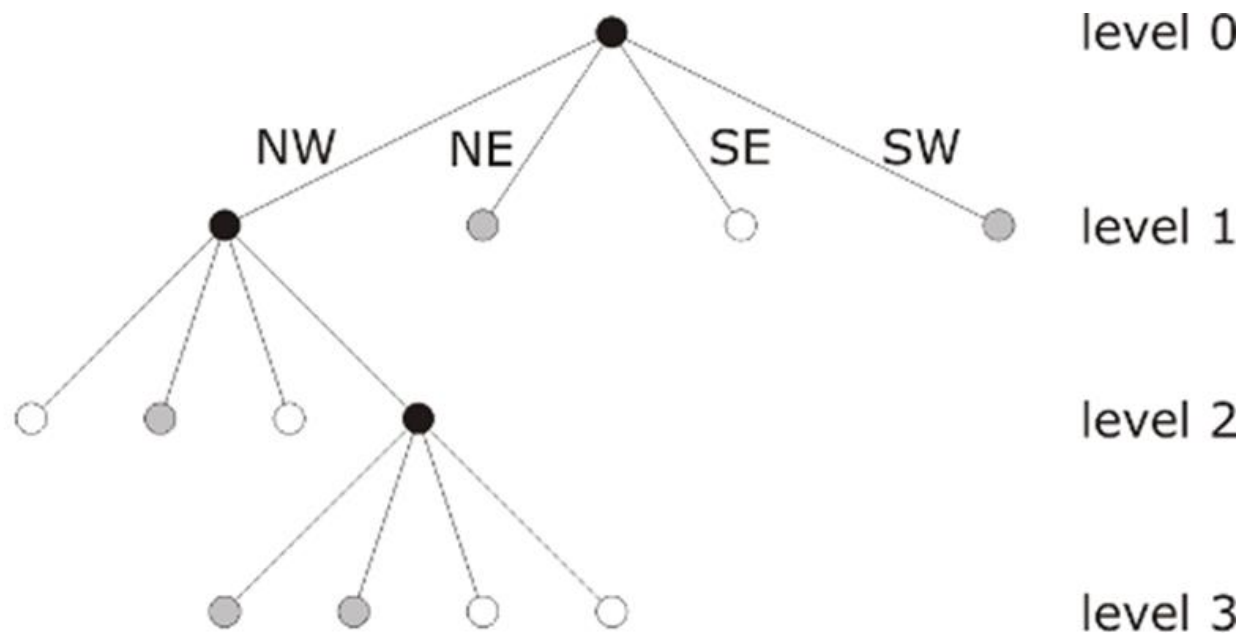
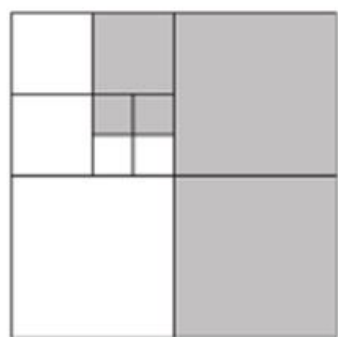
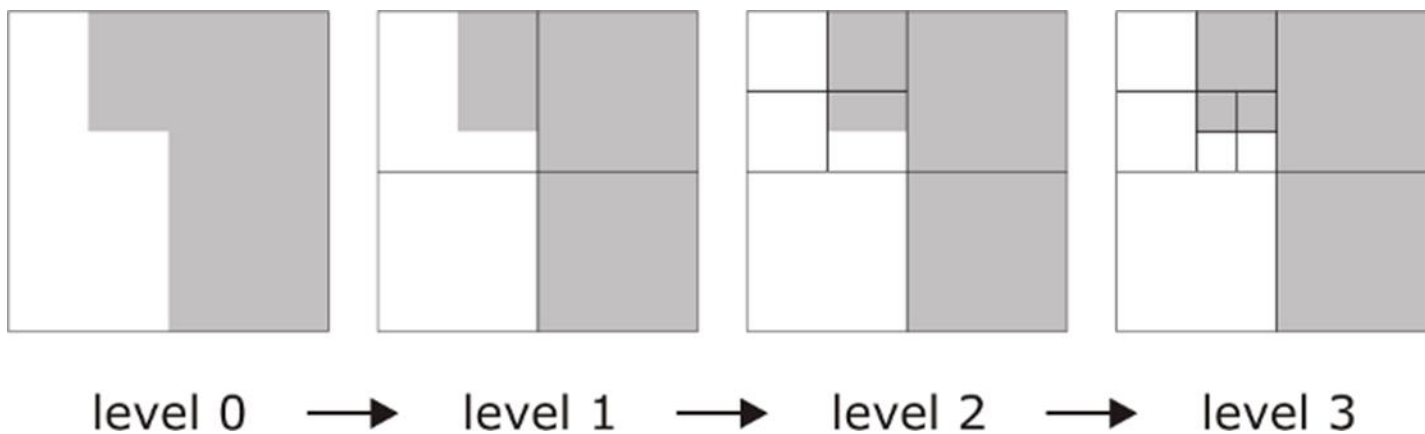


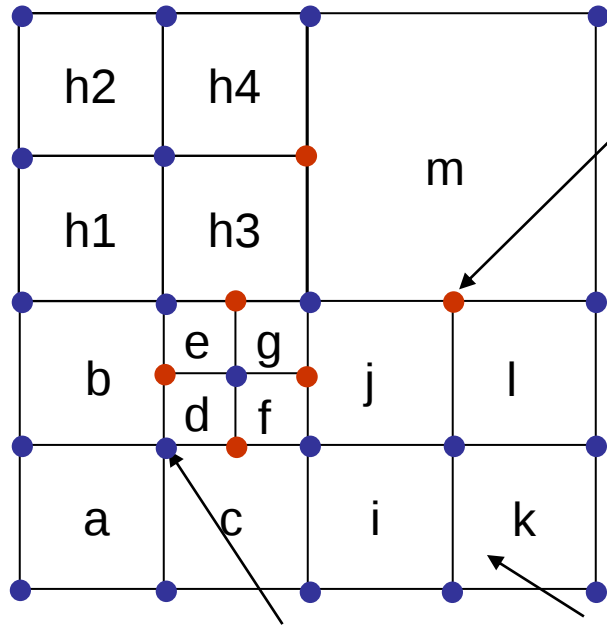
## Binary Tree (drzewo binarne)

```
public class Node1D {  
    public double Key;  
  
    public Node1D parent;  
    public Node1D 1;  
    public Node1D 2;  
    public Node1D 3;  
    public Node1D 4;  
}
```

+ double x1, x2, x3, x4



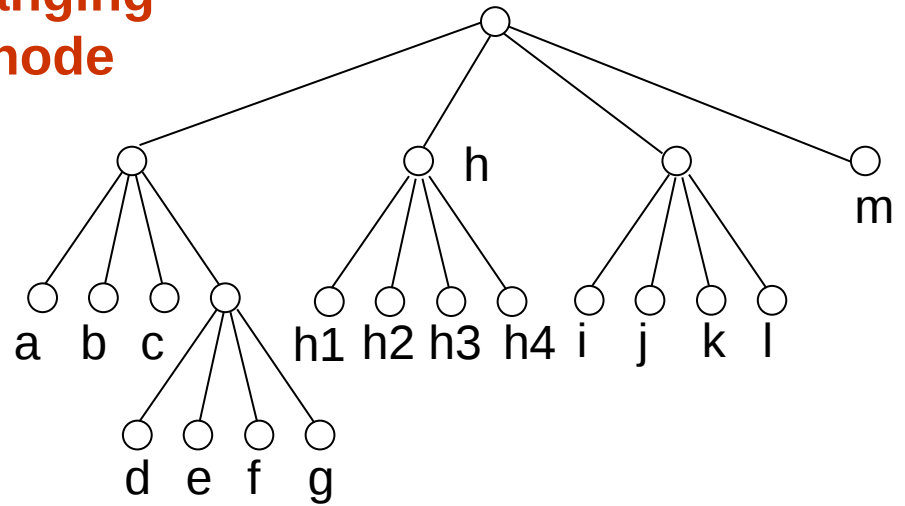




węzeł

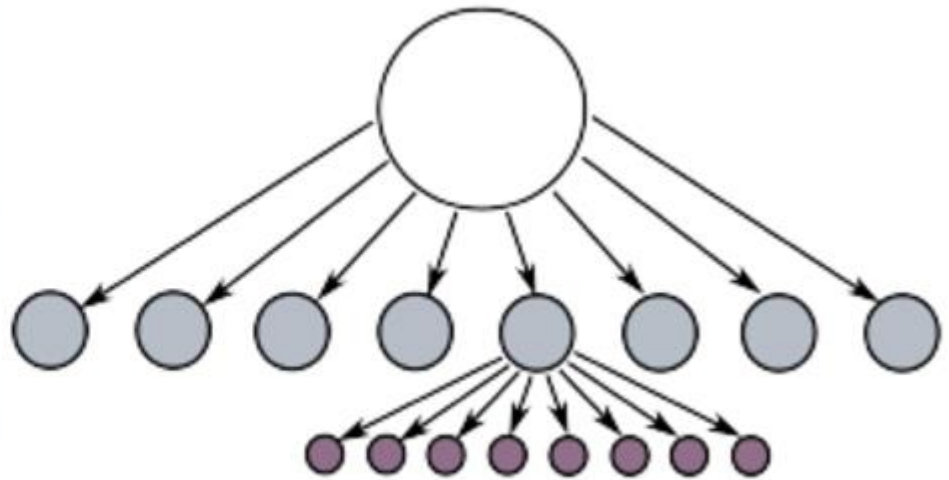
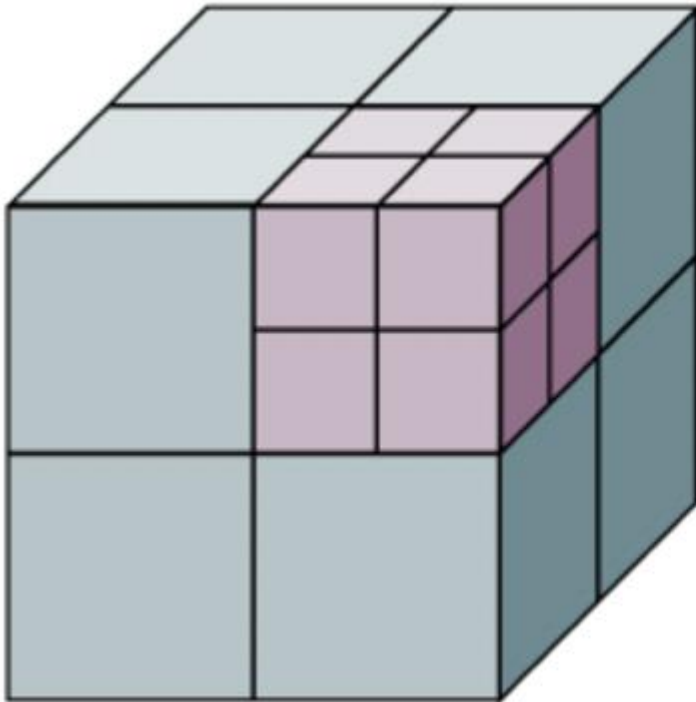
element

hanging  
node





# Quadtree



<https://youtu.be/jxbDYxm-pXg>



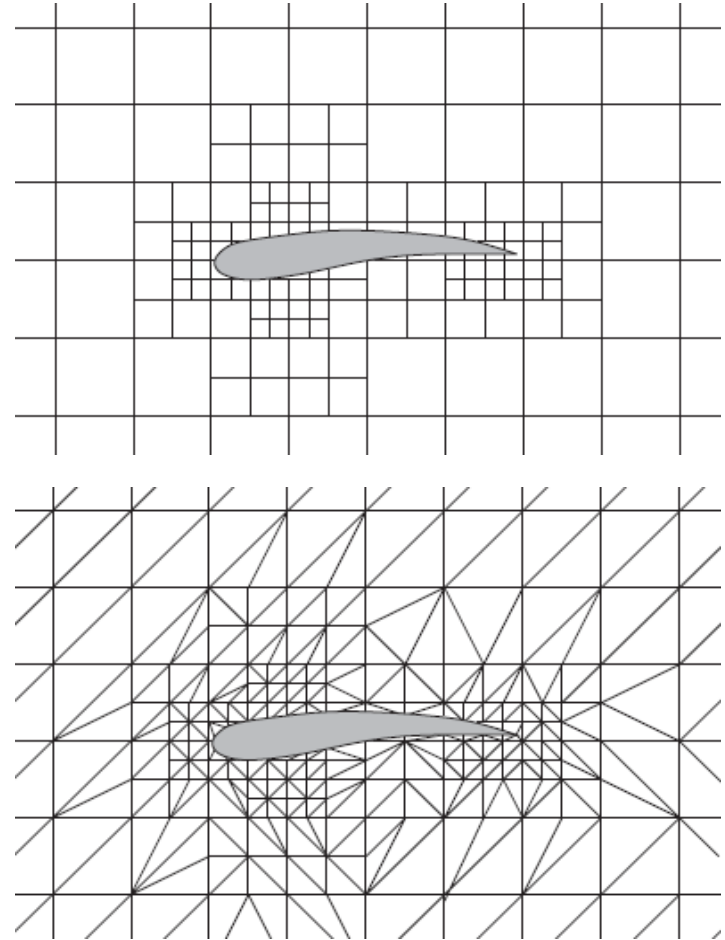
## Octree/Quadtree

Pierwszy etap metod opartych na Octree jest podobny jak w przypadku tworzenia siatek strukturalnych czyli jest to podział przestrzeni na identyczne elementy.

W wypadku przestrzeni 2d zostaje utworzona siatka kwadratów, które to następnie w razie potrzeby np. lepszego odzwierciedlenia geometrii obszaru mogą zostać podzielone na cztery identyczne mniejsze kwadraty, natomiast każdy z czterech mniejszych kwadratów może zostać dodatkowo podzielony na kolejne mniejsze cztery kwadraty i tak w pętli aż do osiągnięcia wymaganej dokładności.

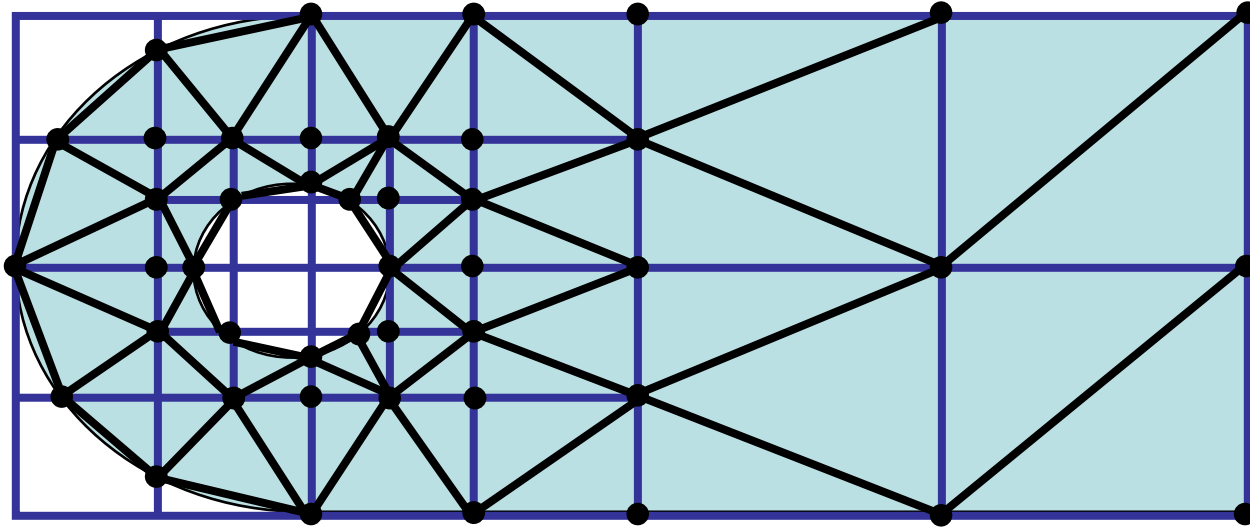
Ostatnim krokiem jest podział kwadratów na trójkąty.

W wypadku przestrzeni 3d zostaje utworzona siatka sześcianów, a każdy z nich może zostać podzielony na osiem mniejszych.





## Octree/Quadtree



**Krok 1.** Zdefiniuj otocznice domeny obliczeniowej w formie prostokąta

**Krok 2.** Rekurencyjnie podziel każdy korzeń na 4 liście aby dokładnie odwzorować analizowany kształt domeny obliczeniowej.

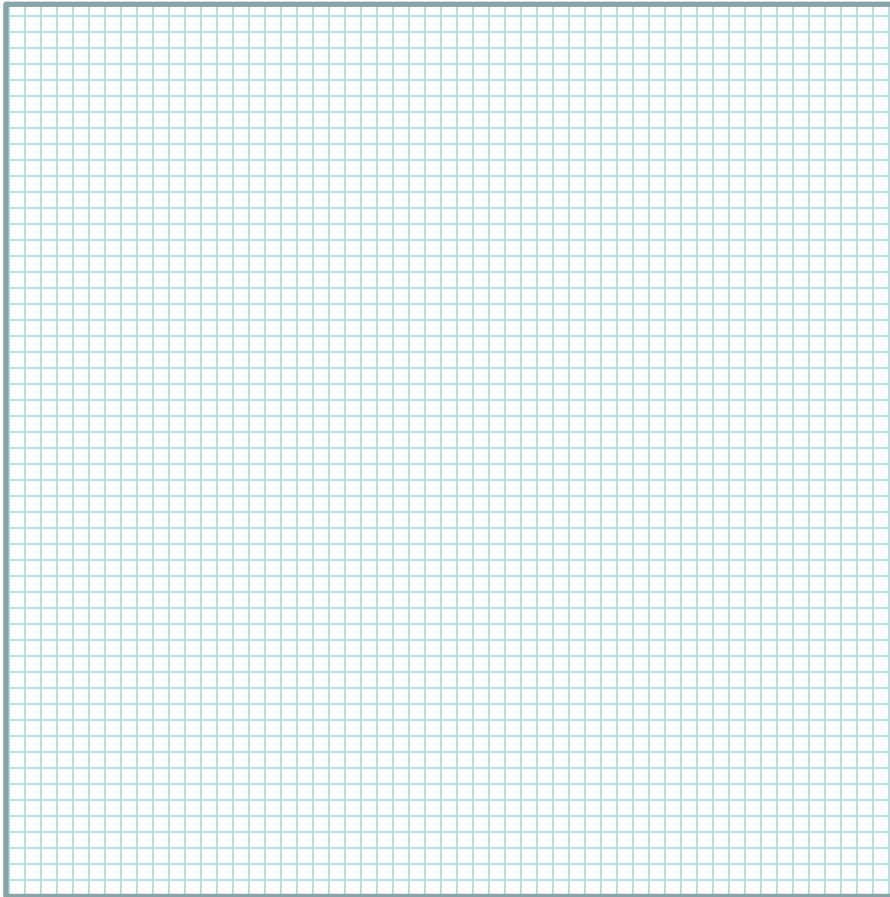
**Krok 3.** Określ punkty/węzły przecięcia liści z granicą obszaru obliczeniowego

**Krok 4.** Podziel każdy liść na trójkąty, z uwzględnieniem punktów przecięć z obszarem obliczeniowym oraz tzw. hanging nodes.

**Krok 5.** Usuń węzły poza obszarem obliczeniowym.

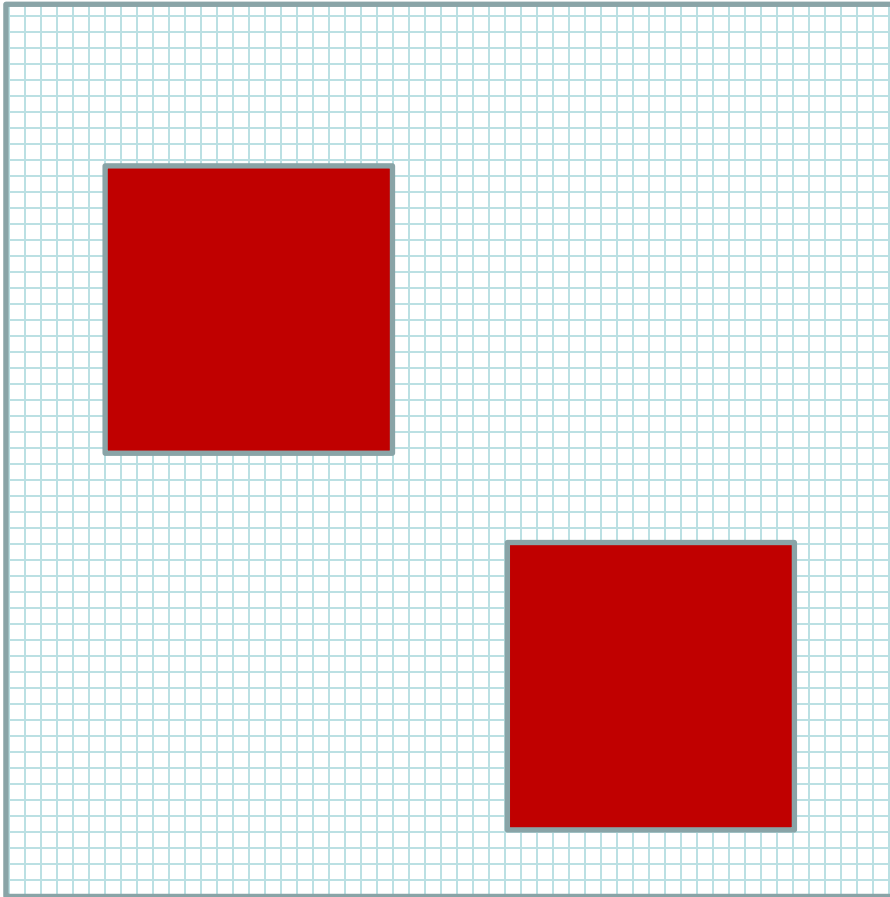


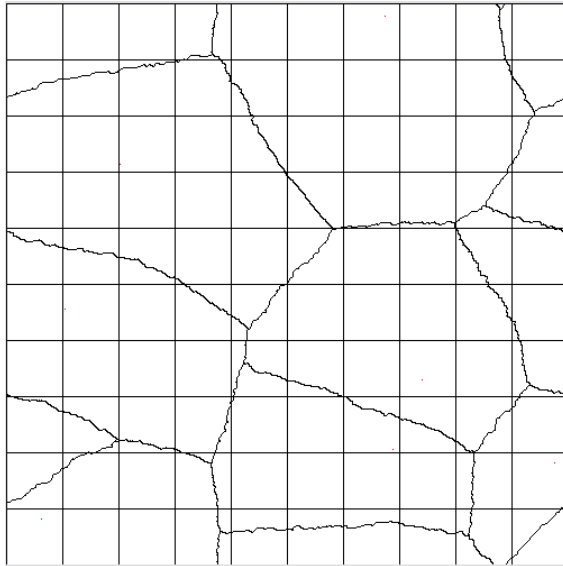
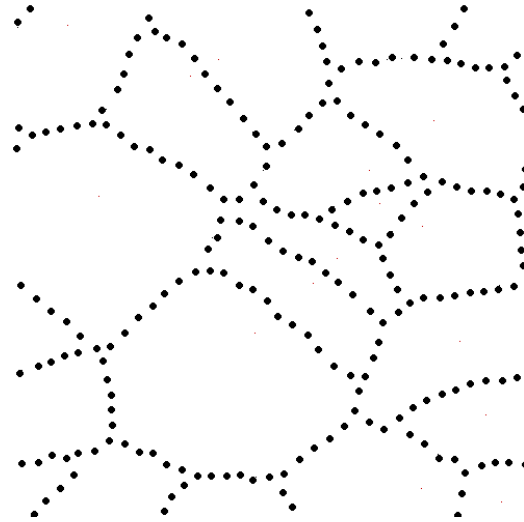
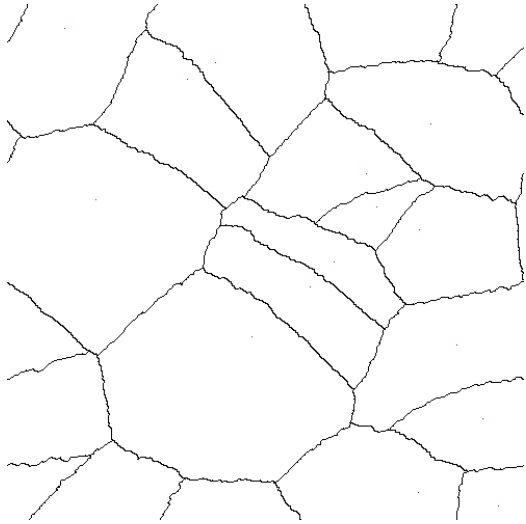
## Przestrzeń komórek CA





## Przestrzeń komórek CA







## Oznaczanie elementów

Prostokątne elementy są specjalnie oznaczane, który element i w jakim stopniu ma zostać w przyszłości podzielony na mniejsze.

Proces oznaczania oparty jest na sprawdzaniu każdego prostokątnego elementu czy w jego wnętrzu znajduje się chociaż jeden z analizowanych punktów symbolizujących np. granicę ziaren/obszaru.

- Każdy element w którym znajduje się taki punkt zostaje oznaczony do maksymalnego podziału czyli do podziału na 16 mniejszych elementów trójkątnych.
- Dla tak oznaczonego elementu należy oznaczyć elementy sąsiednie do odpowiednich podziałów.
- Elementy nie oznaczone zostaną podzielone na dwa trójkąty.

