



# Geometria Obliczeniowa

Prof. dr hab. inż. **Łukasz Madej**

Mgr inż. **Daniel Bachniak**

Katedra Informatyki Stosowanej i Modelowania

Wydział Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej

Budynek B5  
p. 716

[lmadej@agh.edu.pl](mailto:lmadej@agh.edu.pl)  
[home.agh.edu.pl/lmadej](http://home.agh.edu.pl/lmadej)

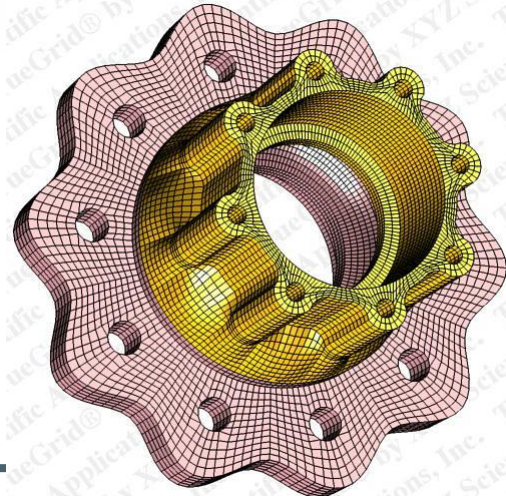
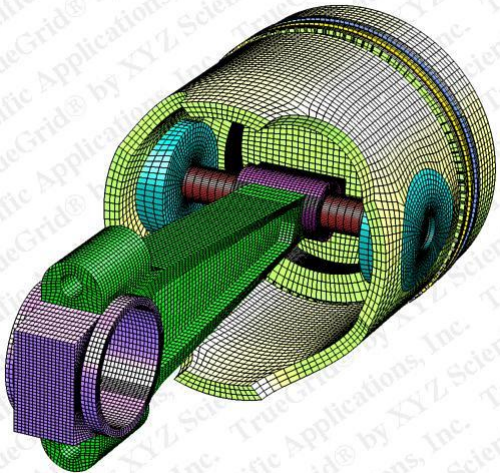
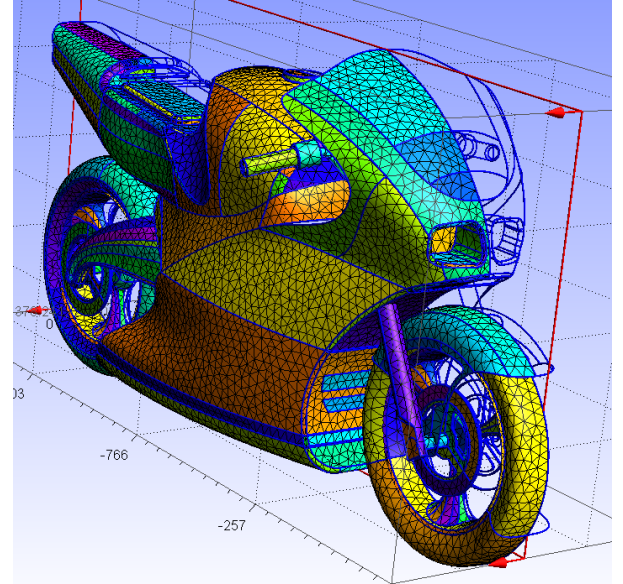
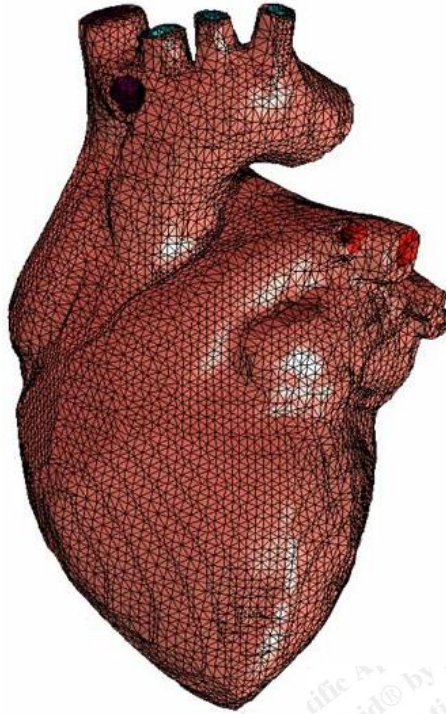
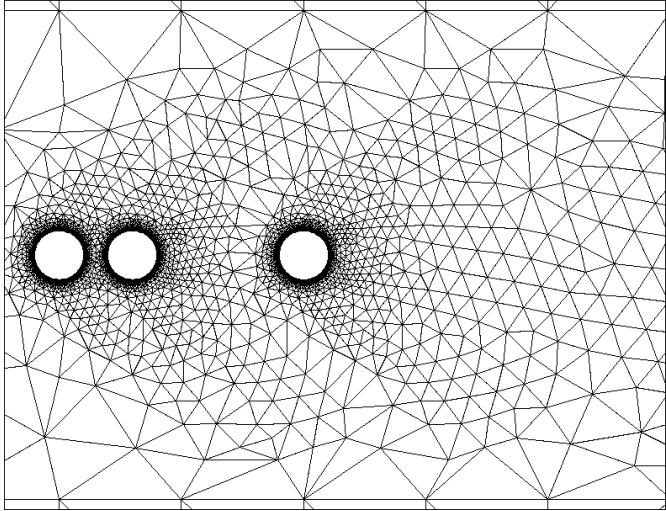


## Dyskretyzacja obszaru – siatki elementów skończonych

Pojawienie się siatek jako sposobu dyskretyzacji przestrzeni było połączone z pierwszymi próbami rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych metodami numerycznymi.

Początkowo tworzenie siatek było traktowane jedynie jako żmudny etap będący niewielką częścią zawiłego procesu komputerowych obliczeń cząstkowych równań różniczkowych metodami różnic skończonych lub elementów skończonych.

Z czasem generowanie siatek ewoluowało czerpiąc równocześnie z innych nauk jak matematyka i informatyka, i w rezultacie zaczęło się stawać dziedziną samą w sobie.





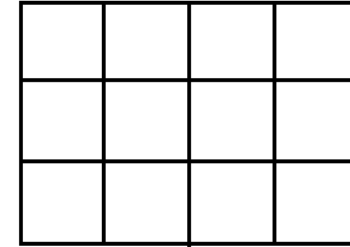
**Zbieżność** - stopniowe zanikanie różnic pomiędzy wynikami uzyskiwanymi na różnych siatkach w miarę ich zagęszczania. Odwrotne zachowanie się wyniku nazywa się rozbieżnością.

Z matematycznego punktu widzenia zbieżność oznacza, że w miarę zagęszczania siatki wynik obliczeń staje się mniej zależny od siatki. To może (ale nie musi!) oznaczać zbliżanie się wyniku przybliżonego do wartości dokładnej.

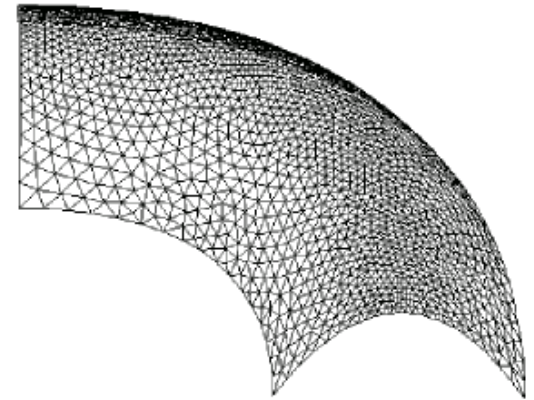
**Rozbieżność** - oznacza, że rozwiązanie jest bardzo niedokładnym a czasem zupełnie fizycznie bezsensownym w całym modelu lub (najczęściej) w jego części.



**Siatki Strukturalne** - to siatki o regularnym kształcie elementów

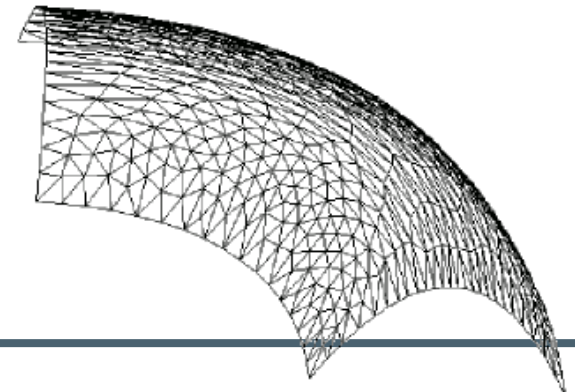


**Siatki Niestukturalne** - to siatki o nieregularnym kształcie elementów



**Siatki Izotropowe** - to siatka której elementy są względnie jednorodne we wszystkich kierunkach

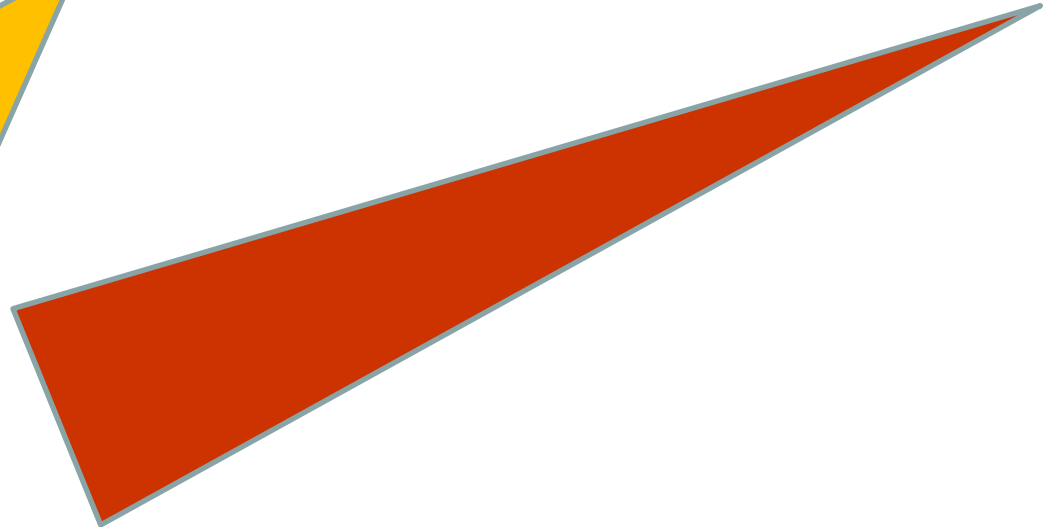
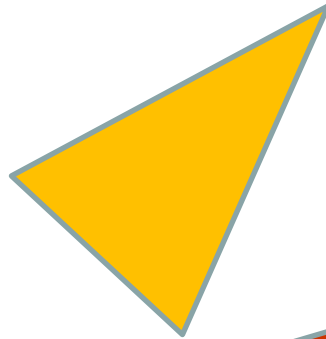
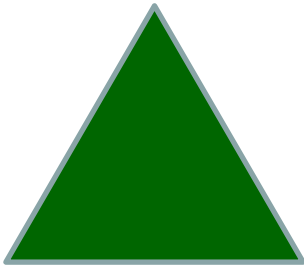
**Siatki Anizotropowe** - to siatka której elementy są rozciągnięte w określonych kierunkach w określonym stopniu







## Jakość elementów skończonych



**Współczynnik jakości** - w przybliżeniu jest to iloraz długości najdłuższego boku/krawędzi do najkrótszego.

Dopuszczalny zakres wartości od **1** (element o doskonałym kształcie) do **5** (już mocno zniekształcony). Narzędzie to można używać do oceny jakości siatek składających się z dowolnych elementów



# Kształt domeny obliczeniowej

**wierzchołki:**  
współrzędne x,y,z

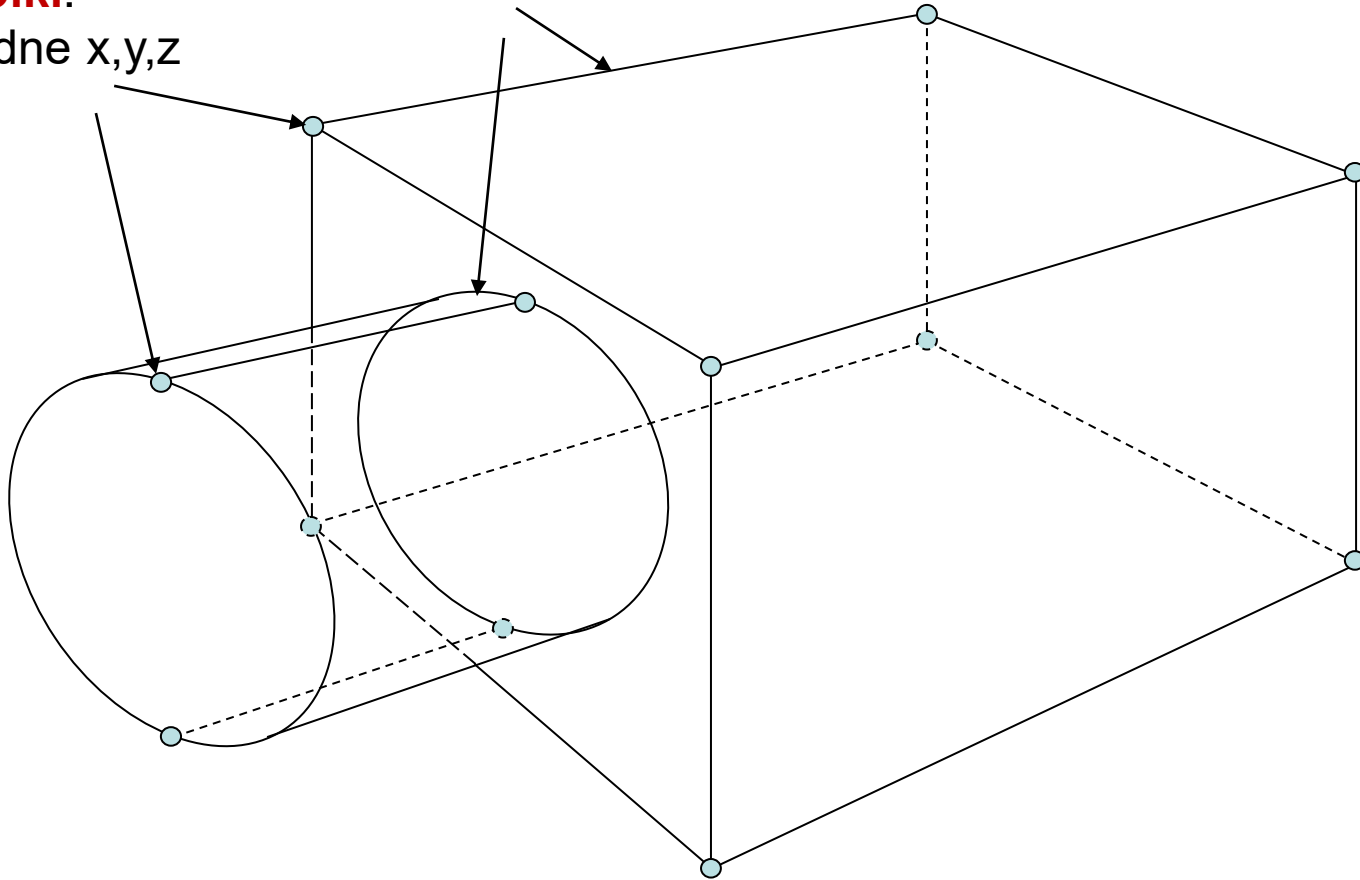




# Kształt domeny obliczeniowej

**wierzchołki:**  
współrzędne  $x, y, z$

**brzezi/granice:** ograniczone przez 2  
wierzchołki





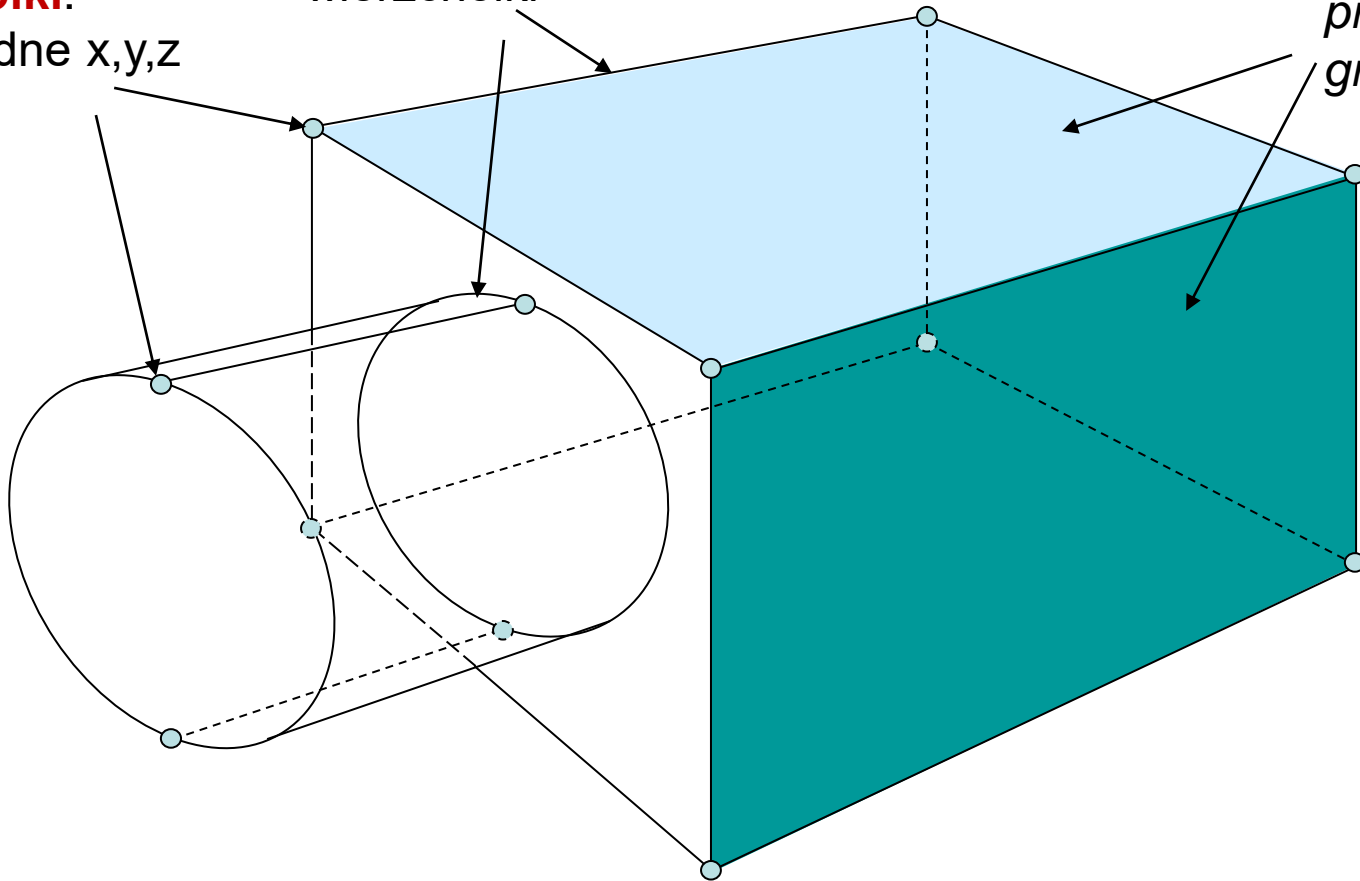


# Kształt domeny obliczeniowej

**wierzchołki:**  
współrzędne  $x, y, z$

**brzegi/granice:** ograniczone przez 2  
wierzchołki

**ściany:**  
ograniczone  
przez brzegi/  
granice



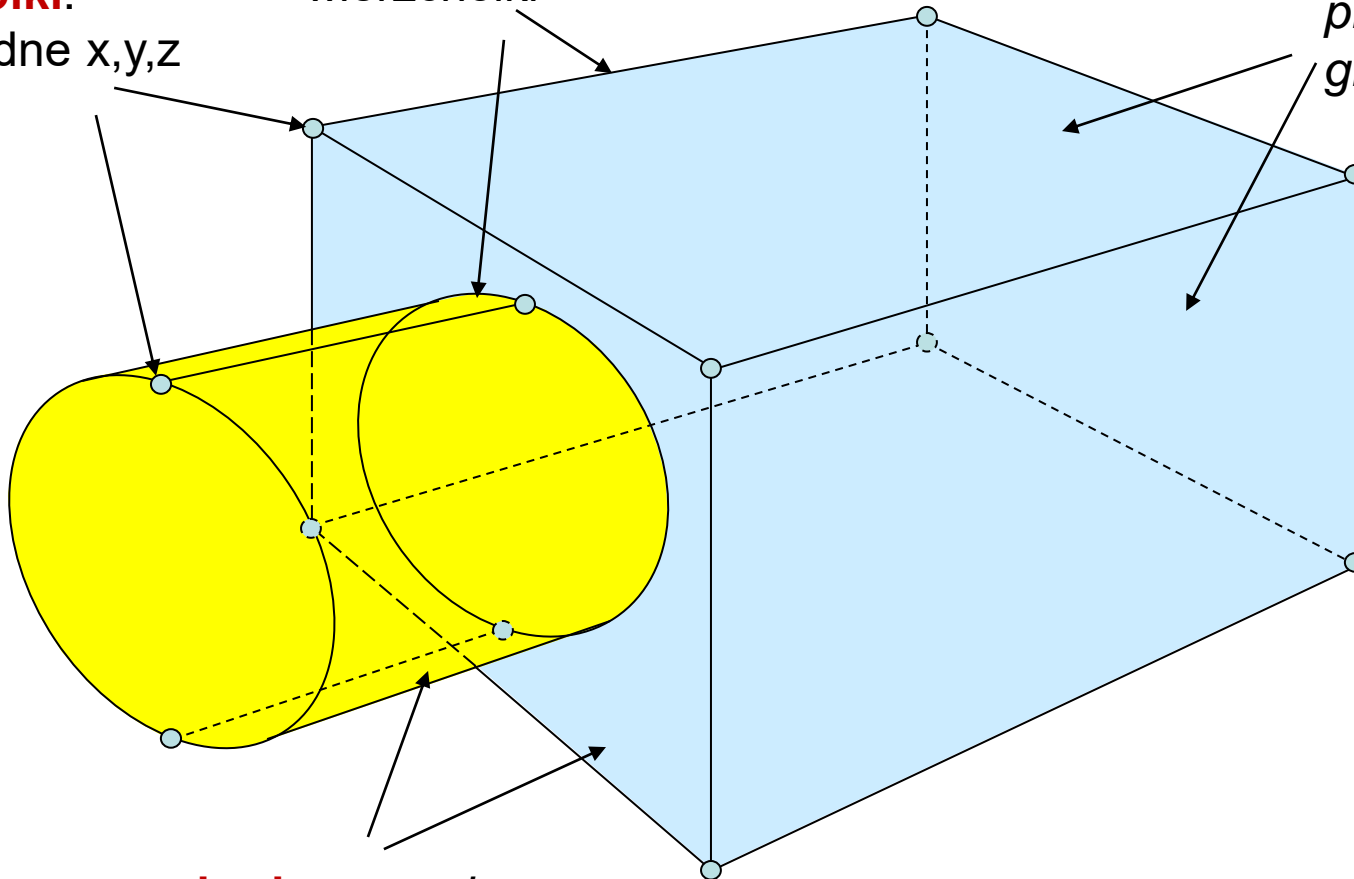


# Kształt domeny obliczeniowej

**wierzchołki:**  
współrzędne  $x, y, z$

**brzegi/granice:** ograniczone przez 2  
wierzchołki

**ściany:**  
ograniczone  
przez brzegi/  
granice



**bryły:** ograniczone przez  
ściany

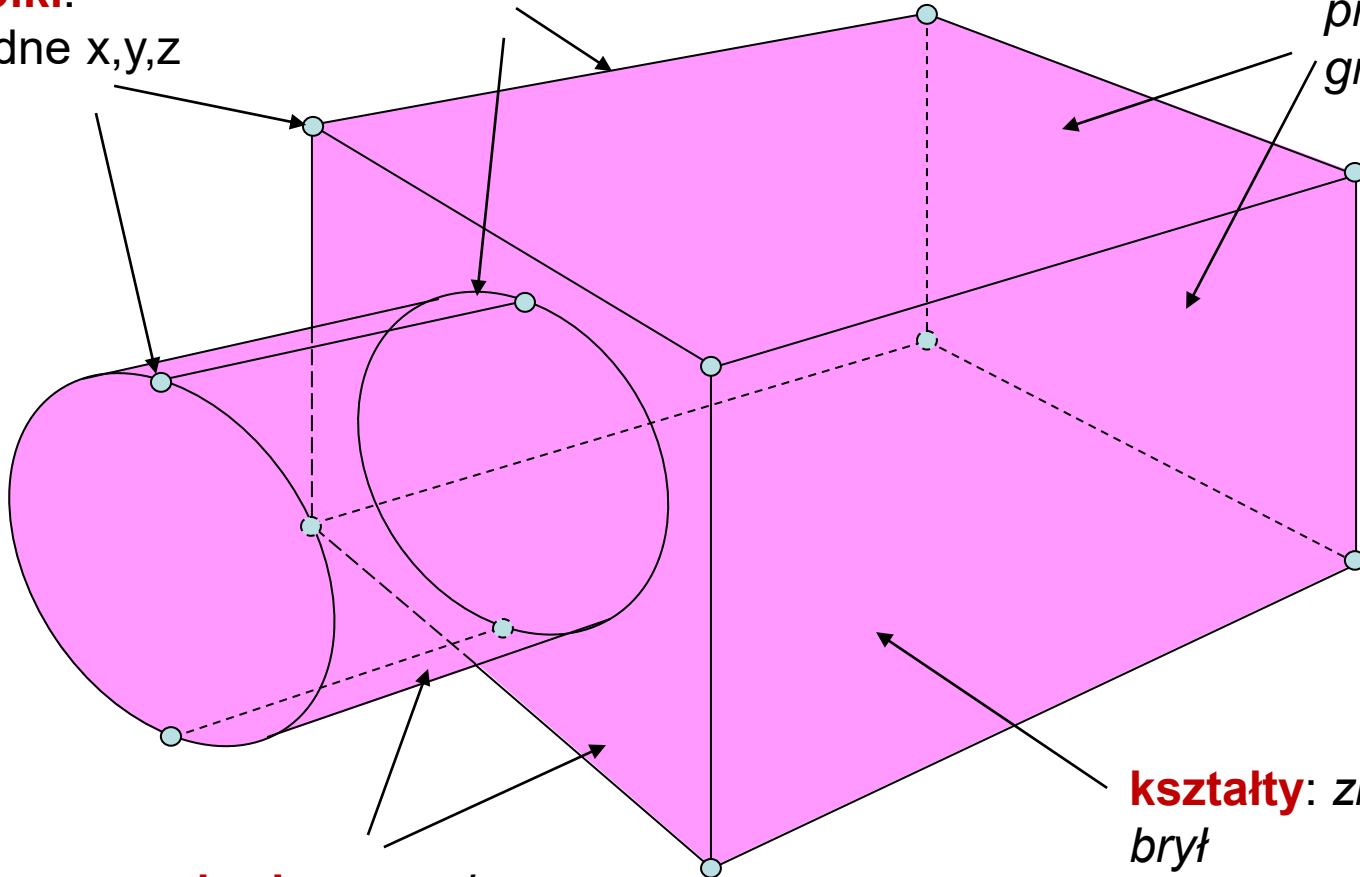


# Kształt domeny obliczeniowej

**wierzchołki:**  
współrzędne x,y,z

**brzegi/granice:** ograniczone przez 2  
wierzchołki

**ściany:**  
ograniczone  
przez brzegi/  
granice

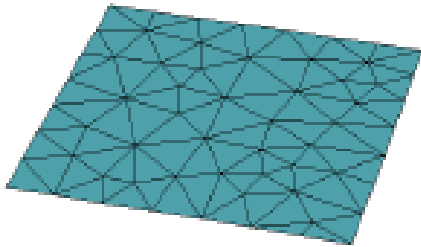


**bryły:** ograniczone przez  
ściany

**kształty:** zbiór  
brył

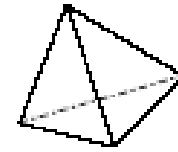
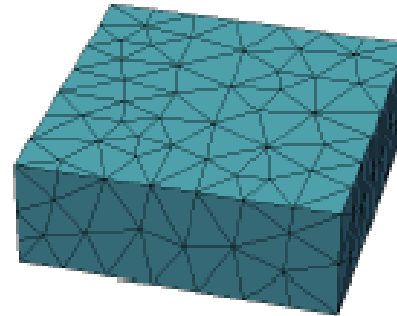


# Elementy skończone



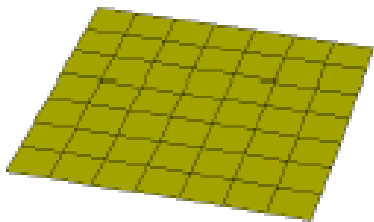
Trójkąt

Tri



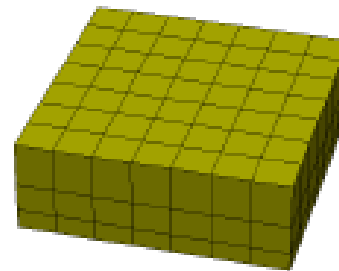
Czworościan

Tet



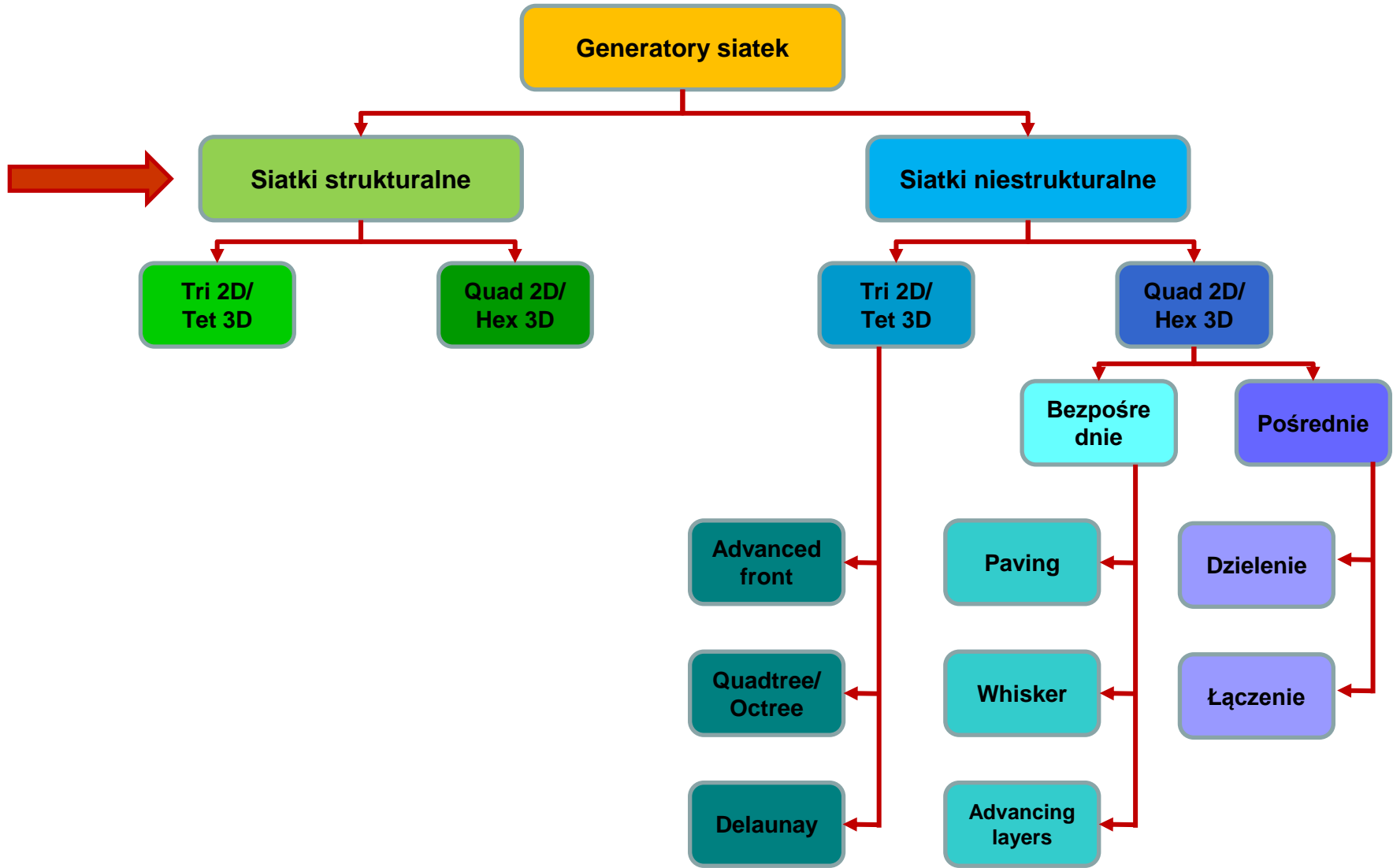
Prostokąt  
Czworokąt

Quad



Sześciościan  
"Cegła"

Hex

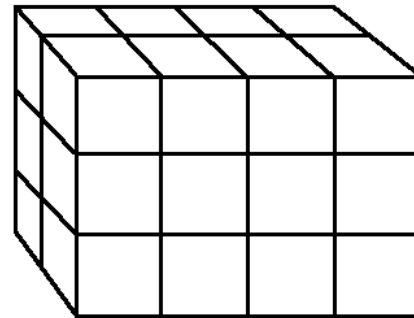
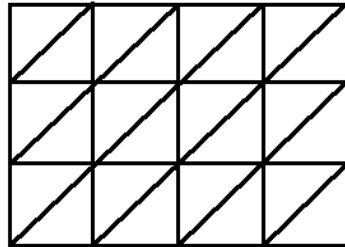
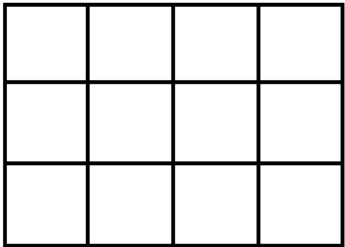




## Siatki strukturalne

Początki tworzenia siatek sięgają lat sześćdziesiątych, kiedy to na potrzeby metody różnic skończonych dyskretyzowano zazwyczaj nieskomplikowane prostokątne obszary.

Obszar pokrywano dwiema wzajemnie prostopadłymi rodzinami prostych.



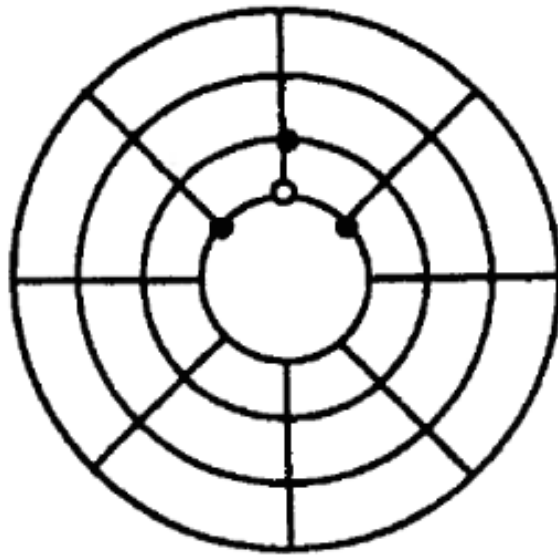
**Charakterystyczna dla siatek strukturalnych jest stała ilość krawędzi incydentalnych dla każdego węzła wewnętrznego.**



## Siatki strukturalne

Stosując różne systemy współrzędnych, takie jak **biegunowy**, **eliptyczny**, **cylicydryczny**, **sferoidalny**, można uzyskać siatki pokrywające bardziej skomplikowane obszary jak np. cylinder.

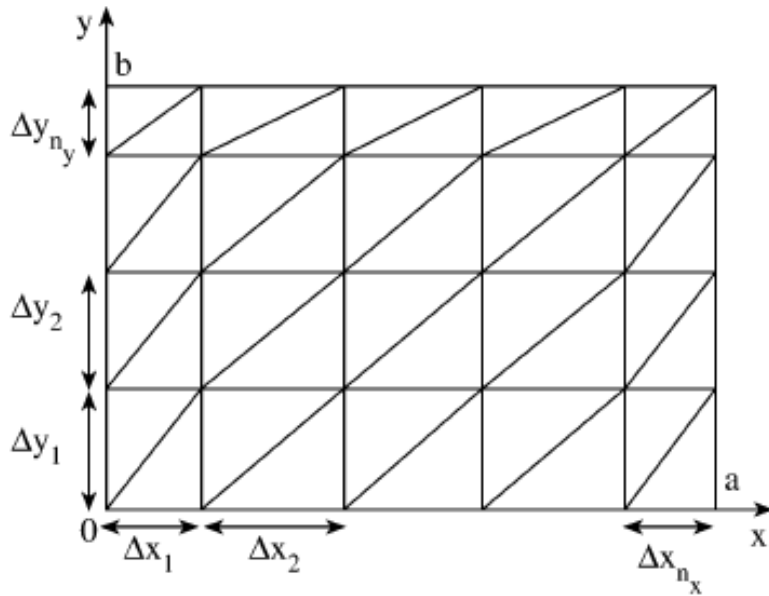
Siatki budowane w ten w oparciu o różne systemy współrzędnych zachowują te same właściwości co siatki budowane w układzie **kartezjańskim**.







## Generator siatek strukturalnych



Prostokątny region rozwiązania ma wymiary **a × b**

Cel - podział regionu na elementy prostokątne, z których każdy następnie zostanie podzielony na dwa elementy trójkątne.

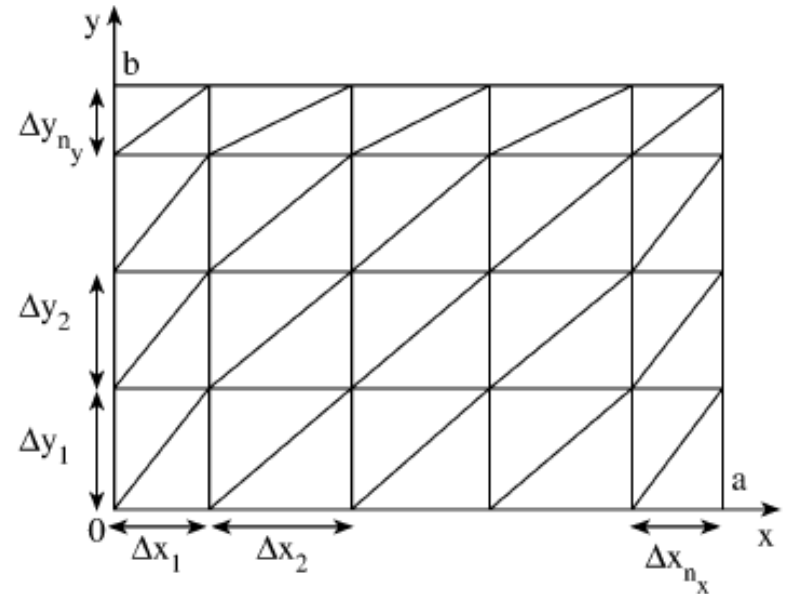


## Siatki strukturalne

Przyjmijmy, że  $n_x$  i  $n_y$  są liczbami podziałów w kierunkach  $x$  i  $y$ . Całkowite liczby elementów  $n_e$  i węzłów  $n_d$  są:

$$n_e = 2n_x n_y$$

$$n_d = (n_x + 1)(n_y + 1)$$





## Siatki strukturalne

Jeśli kolejność numerowania węzłów biegnie od lewej do prawej wzdłuż poziomych rzędów i od dołu ku górze wzdłuż pionowych rzędów, to pierwszym węzłem jest początek układu (0,0).

Następny węzeł otrzymamy gdy  $x \rightarrow x + \Delta x_1$  a  $y = 0$  pozostaje niezmienny.

Następny węzeł ma  $x \rightarrow x + \Delta x_2$ ,  $y = 0$ , i tak dalej aż  $\Delta x_i$  zostaną wyczerpane.

Następny, drugi poziomy rząd rozpoczyna się od  $x = 0$ ,  $y \rightarrow y + \Delta y_1$  i  $x$  rośnie dopóki nie wyczerpią się  $\Delta x_i$ . Powtarzamy proces aż do osiągnięcia ostatniego węzła  $(n_x + 1)(n_y + 1)$  tzn., kiedy  $\Delta x_i$  i  $\Delta y_i$  są wyczerpane jednocześnie.

Prezentowana procedura pozwala na generację **jednorodnej** i **niejednorodnej** siatki. Siatka jest jednorodna jeżeli wszystkie  $\Delta x_i$  są równe i wszystkie  $\Delta y_i$  są równe; w przeciwnym przypadku jest **niejednorodna**.

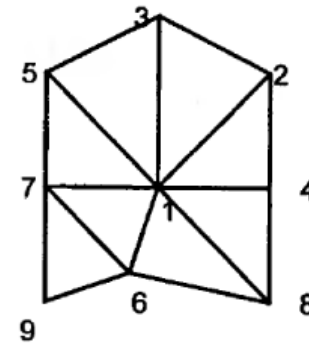


## Siatki niestrukturalne

**Siatki niestrukturalne** są to siatki o nieregularnej topologii.

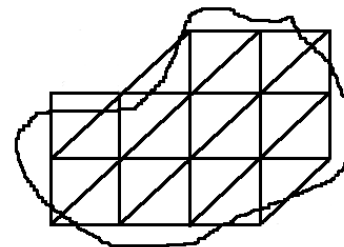
Siatki niestrukturalne mogą być budowane z elementów o różnej wielkości i różnym kształcie. Elementy te mogą się dowolnie łączyć.

Dla siatek niestrukturalnych wymagana jest dodatkowa tablica nazywana **tablicą (macierzą) połączeń**, gdzie zapisane są informacje, który element składa się z jakich punktów.

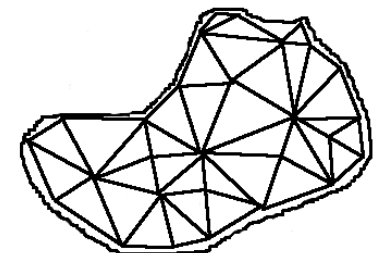


Element, Nodes
1 1, 5, 7
2 1, 4, 2
3 1, 2, 3
4 1, 3, 5
5 1, 7, 6
6 1, 6, 8
7 1, 8, 4
8 7, 9, 6

Siatki niestrukturalne dzięki swojej elastycznej budowie potrafią znacznie dokładniej odzwierciedlać kształt badanego obszaru



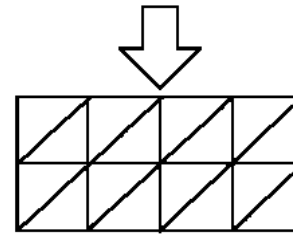
siatka strukturalna



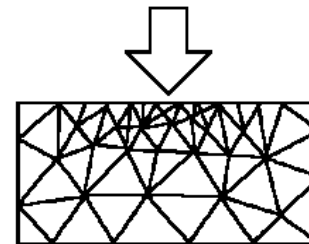
siatka niestrukturalna



Siatka niestructuralna pozwala również na skoncentrowanie relatywnie małych elementów w miejscach gdzie spodziewane są duże zmiany badanych parametrów.



siatka strukturalna



siatka niestructuralna

Trzy najpopularniejsze podejścia do generowania siatek niestructuralnych to:

- **metoda postępującego frontu (AFM),**
- **triangulacja Delaunay'a,**
- **algorytmy oparte na metodzie Octree.**

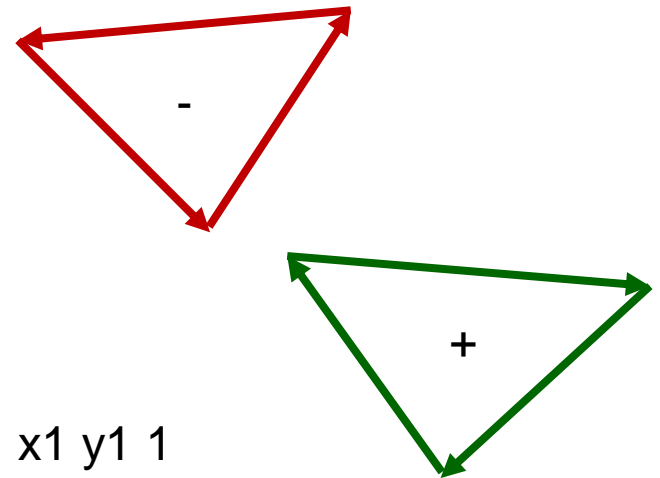


**Trójkąt uporządkowany** to trójkąt, którego wierzchołki są uporządkowane w określony sposób. Boki trójkąta uporządkowanego są wektorami, z których każdy zaczepiony jest w grocie poprzedniego punktu.

Pole i skrętność trójkąta można obliczyć z wyznacznika macierzy:

$$\begin{aligned} \det &= x_1*y_2 + x_2*y_3 + x_3*y_1 - x_2*y_1 - x_3*y_2 - y_3*x_1 = \\ &= (x_1-x_3)*(y_2-y_3) - (x_2-x_3)*(y_1-y_3) \end{aligned}$$

$$\text{Pole} = 0.5*|\det|$$



$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}$$

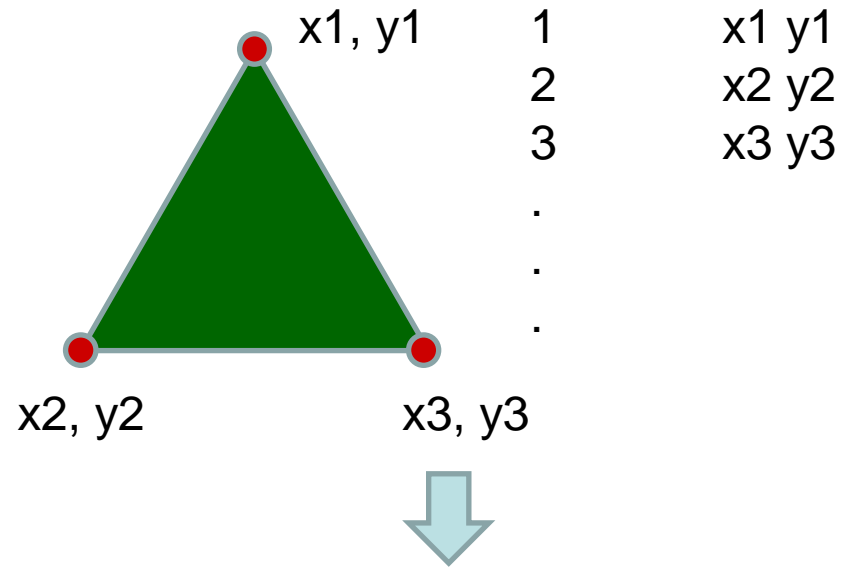
**Dodać dyskusję jak obliczyć skrętność**



## Siatka elementów skończonych:

### - Numer + Współrzędne węzłów

6620,	2.12756,	16.4773,	18.7818
6621,	7.98192,	21.5227,	30.8913
6622,	5.44647,	22.127,	27.0765
6623,	7.57853,	44.9553,	13.3031
6624,	7.5389,	40.466,	18.334
6625,	1.57167,	35.6663,	31.2643
6626,	3.0074,	0.9926,	39.2
6627,	1.43982,	24.0714,	38.4431
6628,	2.73239,	18.2973,	16.705
6629,	7.72112,	13.5814,	30.4989
6630,	6.13026,	29.8731,	6.71123



### - Numer + numery węzłów

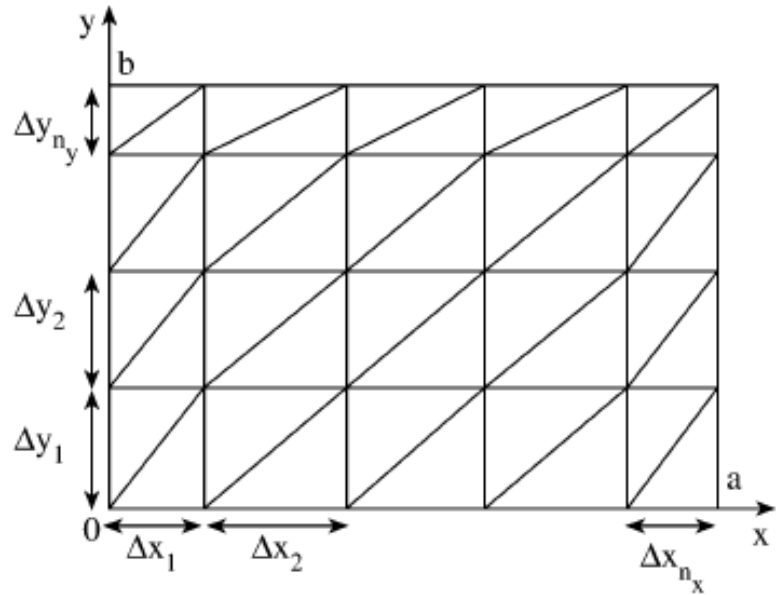
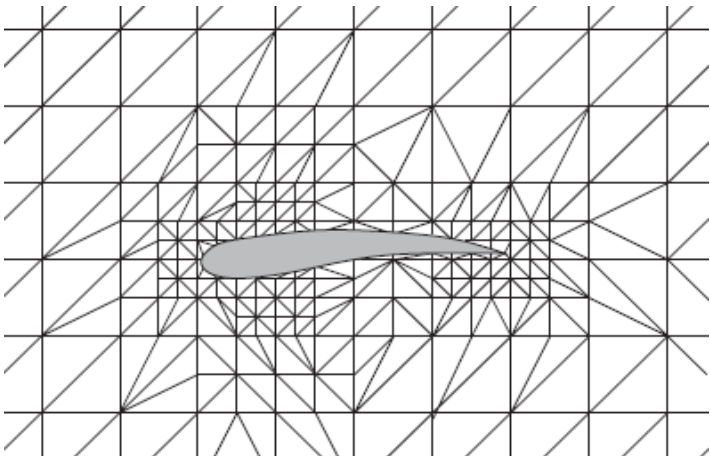
```
*Element, type=C3D4
1, 7012, 7160, 7479, 6194
2, 2588, 6995, 6720, 7091
3, 2053, 2041, 1642, 2040
4, 5046, 460, 459, 1080
5, 5565, 761, 757, 4048
6, 6972, 6172, 6145, 6710
7, 2932, 7590, 2909, 2488
8, 909, 1261, 1269, 910
9, 1059, 1432, 1060, 1055
```

1	1	2	3
.	.	.	.





1. Siatka strukturalna
2. Siatka Quadtree
3. Wygładzanie siatki Quadtree



Wykład: czas godzina. Rozszerzyć.