Geometria Obliczeniowa

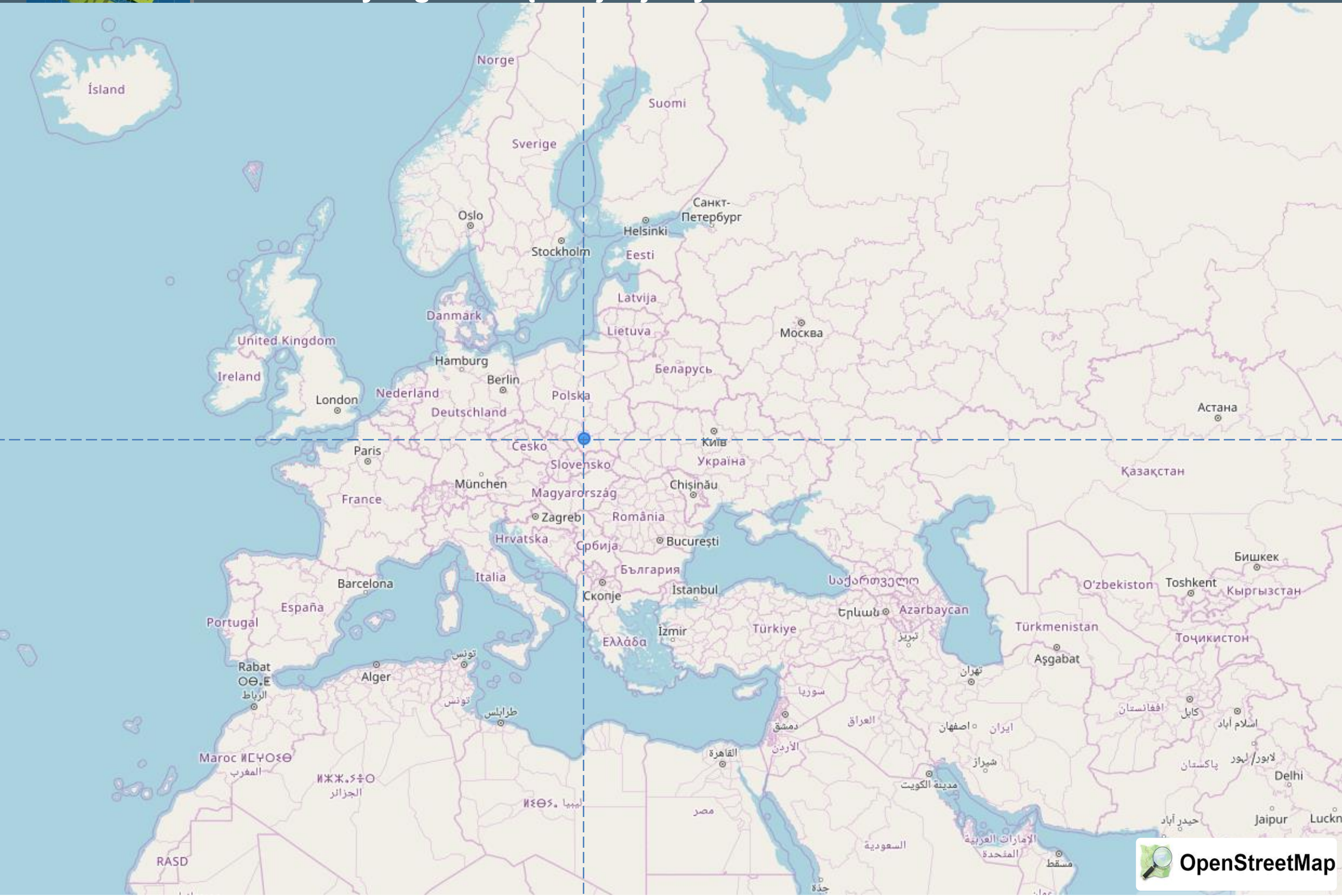
Lokalizacja punktu w przestrzeni

Prof. dr hab. inż. **Łukasz Madej**
Mgr inż. **Daniel Bachniak,** Mgr inż. **Mateusz Mojżeszko**
Katedra Informatyki Stosowanej i Modelowania
Wydział Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej

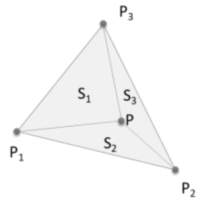
Budynek B5
p. 716
lmadej@agh.edu.pl
home.agh.edu.pl/lmadej

Lokalizacja punktu

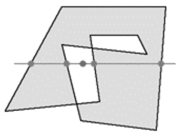
Wiedza o tym gdzie się znajdujemy



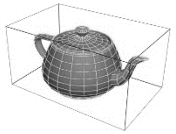
Plan



1. **Punkt wewnątrz trójkąta:**
   - suma pól trójkątów,
   - suma kątów,
   - po lewej czy prawej „stronie” boku wielokąta,
   - współrzędne barycentryczne,
   - układ równań parametrycznych.



2. **Punkt wewnątrz wielokąta:**
   - test przecięć,
   - test sumowanie kątów,
   - test trójkątów.

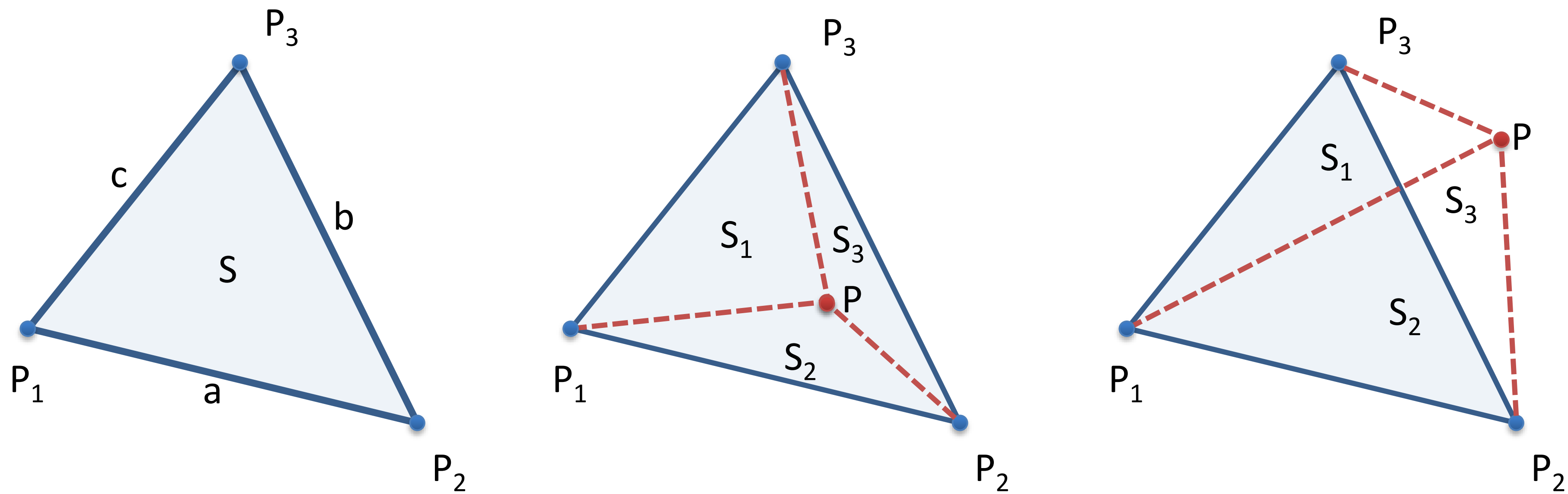


3. **Pozostałe aspekty:**
   - zawężenie obszaru poszukiwań,
   - aspekty implementacyjne.

Część I

Punkt wewnątrz trójkąta

Suma pól trójkątów



Jeśli ($S > S_1 + S_2 + S_3$):
punkt znajduje się poza trójkątem

w przeciwnym przypadku:
punkt znajduje się wewnątrz trójkąta.

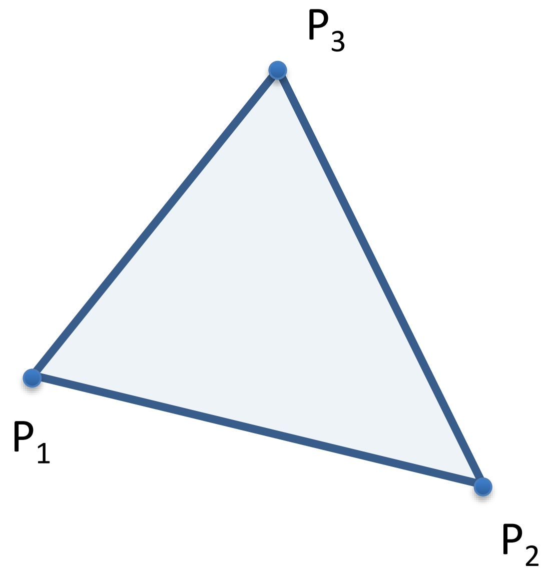
Pole trójkąta (wzór Herona):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

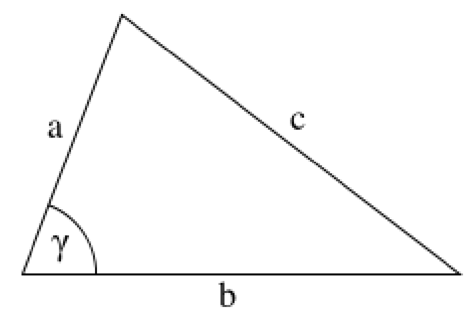
połowa obwodu trójkąta: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Przynależność punktu trójkąta

Test sumowania kątów między punktem a wierzchołkami



Twierdzenie cosinusów - w dowolnym trójkącie, kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.



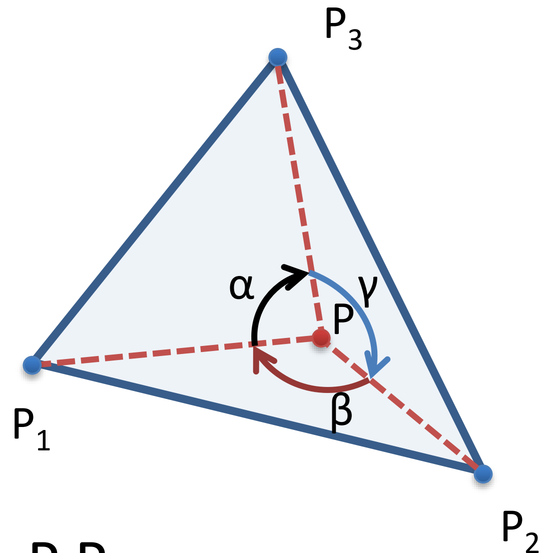
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

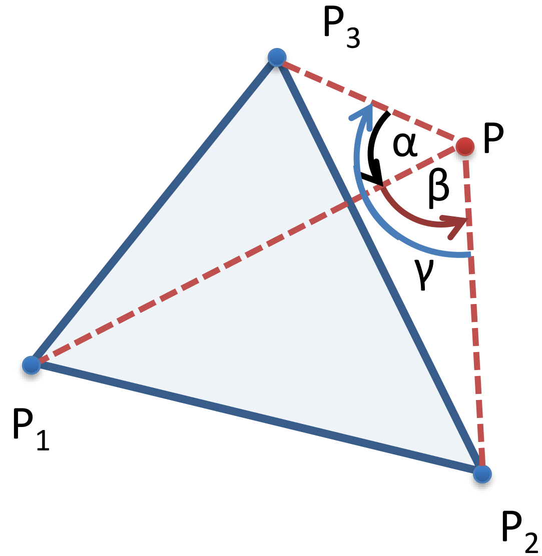
$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)$$

https://pl.wikipedia.org

Przynależność punktu trójkąta

Test sumowania kątów między punktem a wierzchołkami





$\alpha = \angle P_1 P P_3$

$\beta = \angle P_1 P P_2$

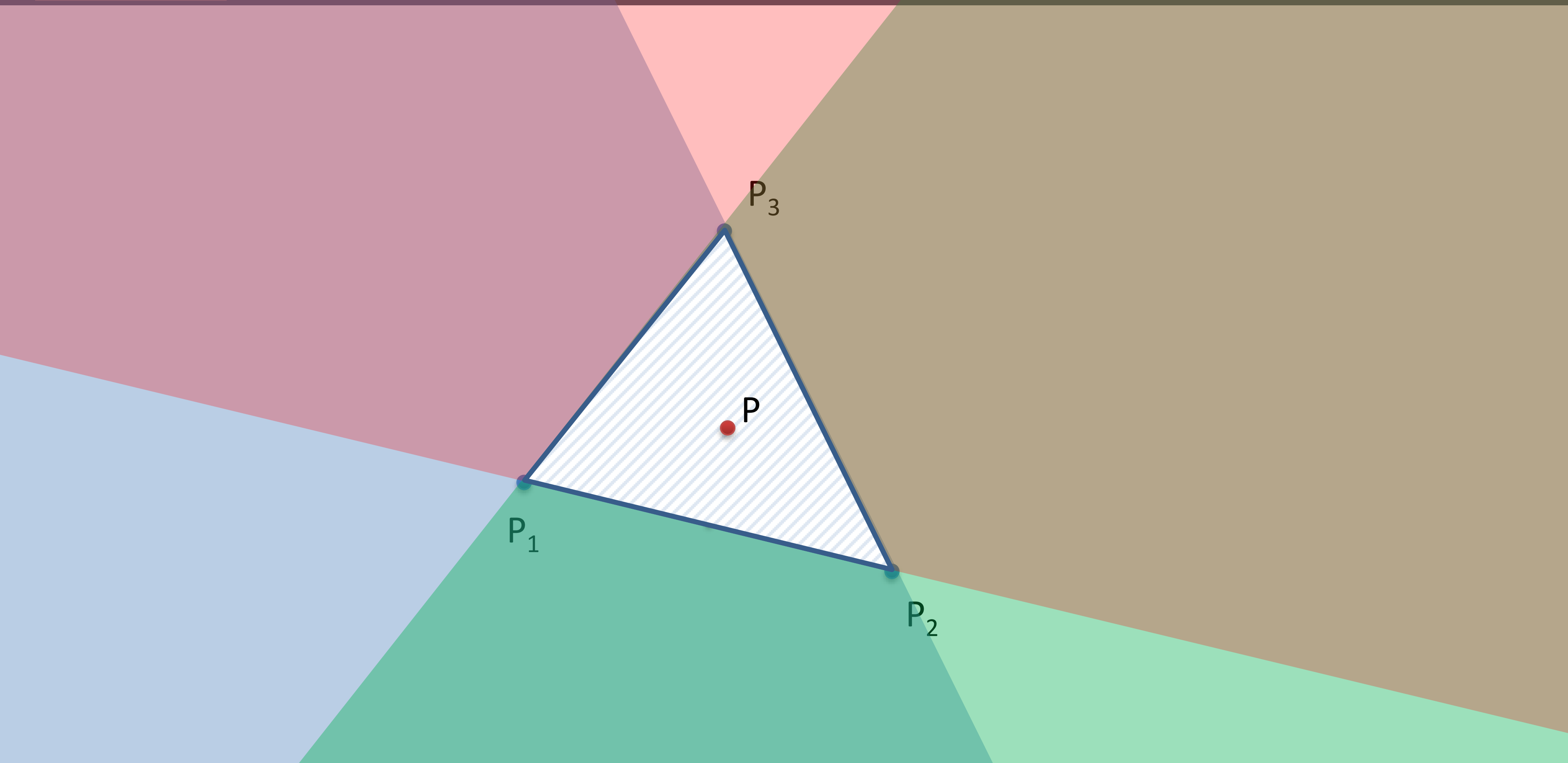
$\gamma = \angle P_2 P P_3$

Jeśli ($\alpha + \beta + \gamma = 360$):
punkt w trójkącie

W przeciwnym przypadku:
punkt poza trójkątem

Przynależność punktu trójkąta

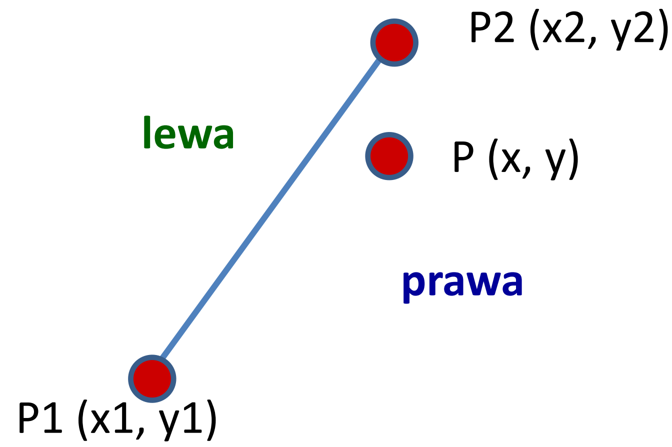
Punkt po lewej stronie wszystkich boków



1. Należy wyznaczyć 3 proste „przechodzące” przez poszczególne boki trójkąta.
2. Jeśli punkt P znajduje się zawsze po lewej lub zawsze po prawej stronie tych prostych (w zależności od kierunku analizy) to punkt znajduje się wewnątrz trójkąta.

Położenie punktu względem odcinka - przypomnienie

Prosta dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny („strony”).



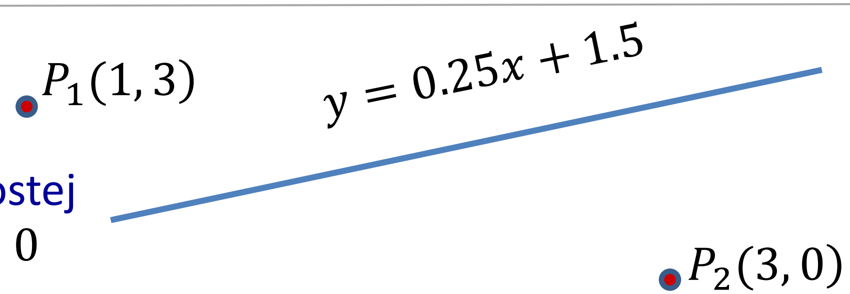
Jeśli równanie prostej zapisane jest w postaci:

***Ax* + *By* + *C* = 0** (**równanie ogólne prostej**)

to punkt zdefiniowany przez współrzędne (x, y) znajduje się:

- z „lewej” strony prostej jeśli ***Ax* + *By* + *C* < 0**,
- z „prawej” strony prostej jeśli ***Ax* + *By* + *C* > 0**,
- „na” prostej jeśli ***Ax* + *By* + *C* = 0**.

Przykład



równanie ogólne prostej

$$y = 0.25x + 1.5 \quad \Rightarrow \quad 0.25x - y + 1.5 = 0$$

$P_1(1, 3) \Rightarrow$ 0.25 * 1 – 3 + 1.5 = **-1.25 < 0 („lewa” strona)**

$P_2(3, 0) \Rightarrow$ 0.25 * 3 – 0 + 1.5 = **1.5 > 0 („prawa” strona)**

Współrzędne barycentryczne

W kartezjańskim układzie współrzędnych każdy punkt na płaszczyźnie lokalizowany jest przy pomocy pary liczb (x, y), które są odpowiednio odległościami punktu od osi y oraz x.

W przypadku współrzędnych barycentrycznych położenie punktów opisywane jest w odniesieniu do współrzędnych tzw. sympleksu.

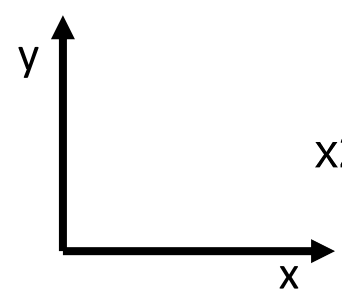
Bezwymiarowe współrzędne punktu x, y – ilorazy pól trójkątów A_i i pola całkowitego A

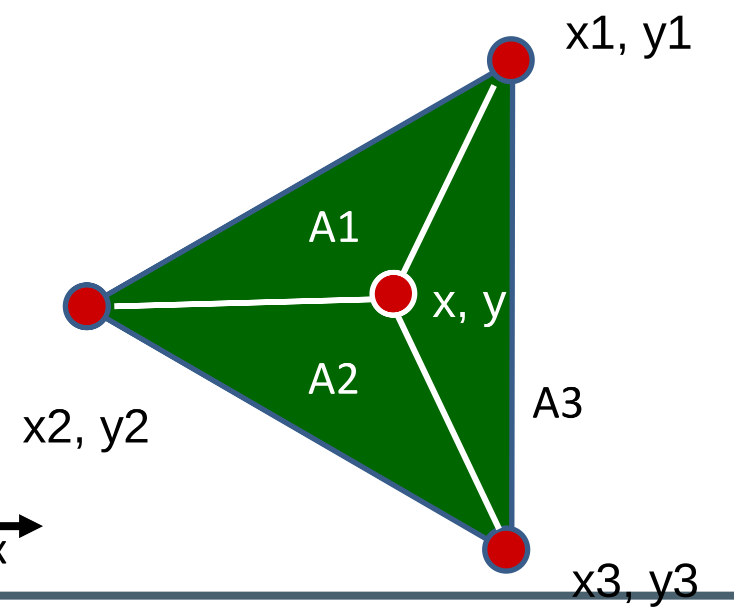
$$L_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$





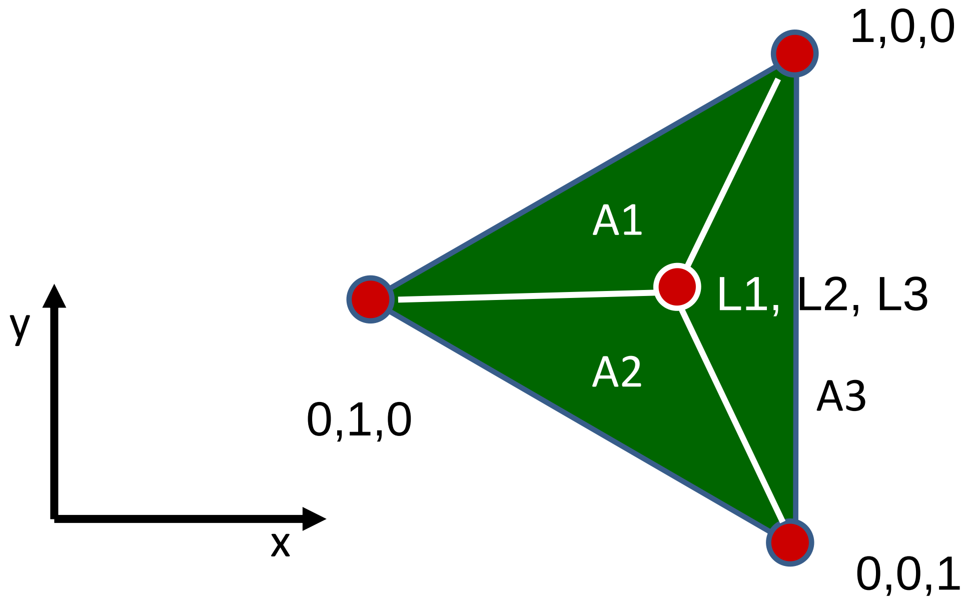
Zatem każdy punkt ma przypisane 3 współrzędne:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = A_1$$

$$L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{A_1}{A_1} = 1$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{0}{A} = 0$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{0}{A} = 0$$



$$x = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3$$

$$y = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$$

Zależność pomiędzy współrzędnymi układu barycentrycznego a kartezjańskiego

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

Warunek na punkt wewnątrz trójkąta

Czyli po podstawieniu za L3, otrzymujemy układ równań:

$$x = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 \left(1 - L_1 - L_2\right)$$

$$y = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 \left(1 - L_1 - L_2\right)$$

$$x = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 - x_3 L_1 - x_3 L_2$$

$$y = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 - y_3 L_1 - y_3 L_2$$

$$x - x_3 = L_1 \left(x_1 - x_3\right) + L_2 \left(x_2 - x_3\right)$$

$$y - y_3 = L_1 \left(y_1 - y_3\right) + L_2 \left(y_2 - y_3\right)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_3 \\ y - y_3 \end{bmatrix}$$

Metoda wyznaczników

Zadanie

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_3 \\ y - y_3 \end{bmatrix}$$

$$A \bullet X = B$$

$$W = \det(A) = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)$$

$$W_{L1} = (x - x_3)(y_2 - y_3) - (y - y_3)(x_2 - x_3)$$

$$W_{L2} = (x_1 - x_3)(y - y_3) - (y_1 - y_3)(x - x_3)$$

$$L_1 = \frac{W_a}{W}$$

$$L_2 = \frac{W_b}{W}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_3)(y_2 - y_3) - (y - y_3)(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)}$$

$$L_2 = \frac{(x_1 - x_3)(y - y_3) - (y_1 - y_3)(x - x_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2$$

$$\boxed{\begin{cases} L_1 \in \langle 0,1 \rangle \\ L_2 \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow \text{Punkt wewnątrz trójkąta} \\ L_3 \in \langle 0,1 \rangle \end{cases}}$$

Punkt wewnątrz trójkąta

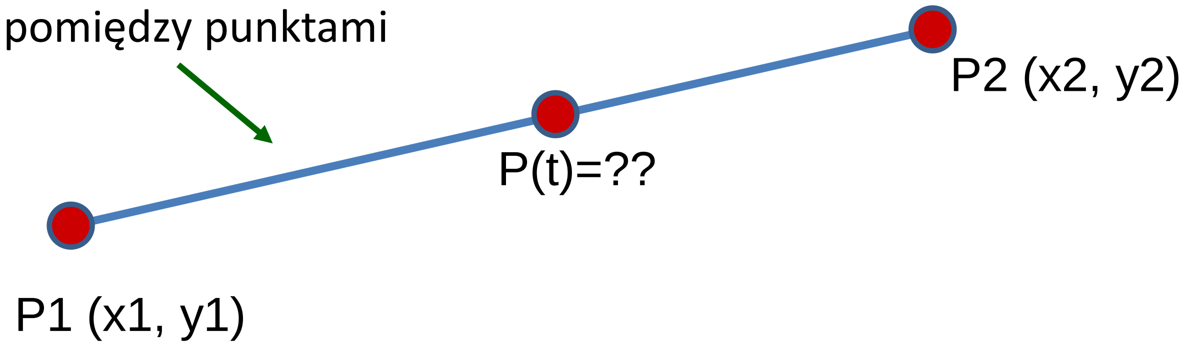
Parametryczne równanie odcinka (1)

Równanie parametryczne - określa daną wielkość jako funkcję jednej lub kilku zmiennych nazywanych parametrami.

Wektor pomiędzy punktami

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t$$

$$t \in \langle 0,1 \rangle$$



$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

lub

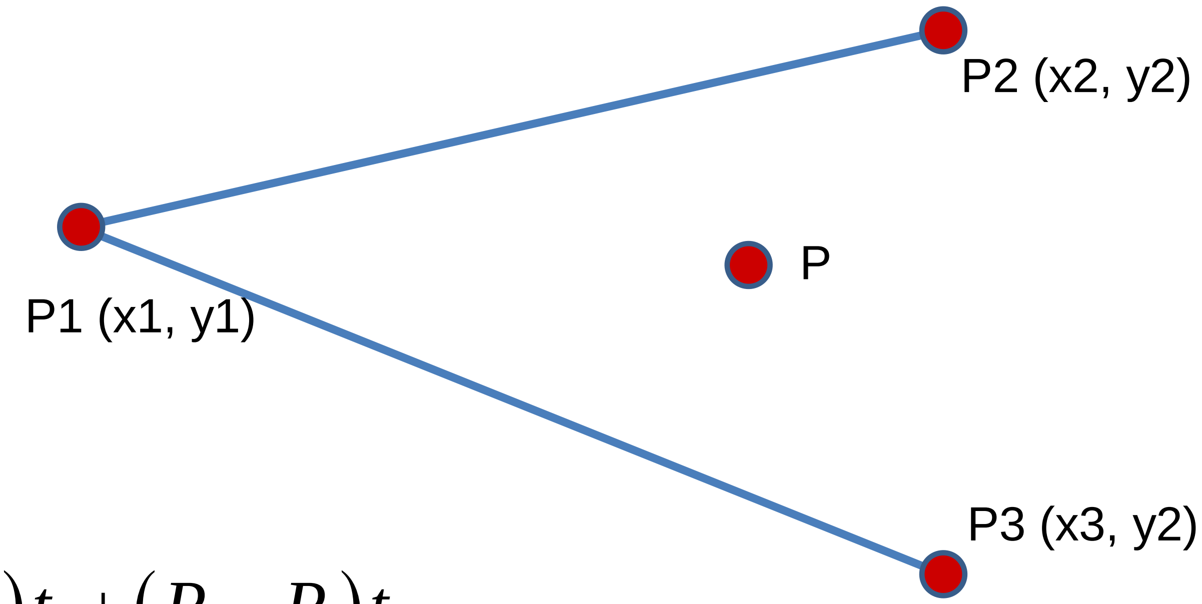
$$\begin{cases} x = x_2 t + (1-t)x_1 \\ y = y_2 t + (1-t)y_1 \end{cases}$$

Dla t=0 → P=P1

Dla t=1 → P=P2

Punkt wewnątrz trójkąta

Układ równań parametrycznych (1)



$$P = P_1 + (P_2 - P_1)t_1 + (P_3 - P_1)t_2$$

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t_1 + (x_3 - x_1)t_2 \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t_1 + (y_3 - y_1)t_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{bmatrix}$$

$$W = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$W_{t1} = (x - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)$$

$$W_{t2} = (x_2 - x_1)(y - y_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$t_1 = \frac{W_{t1}}{W}$$

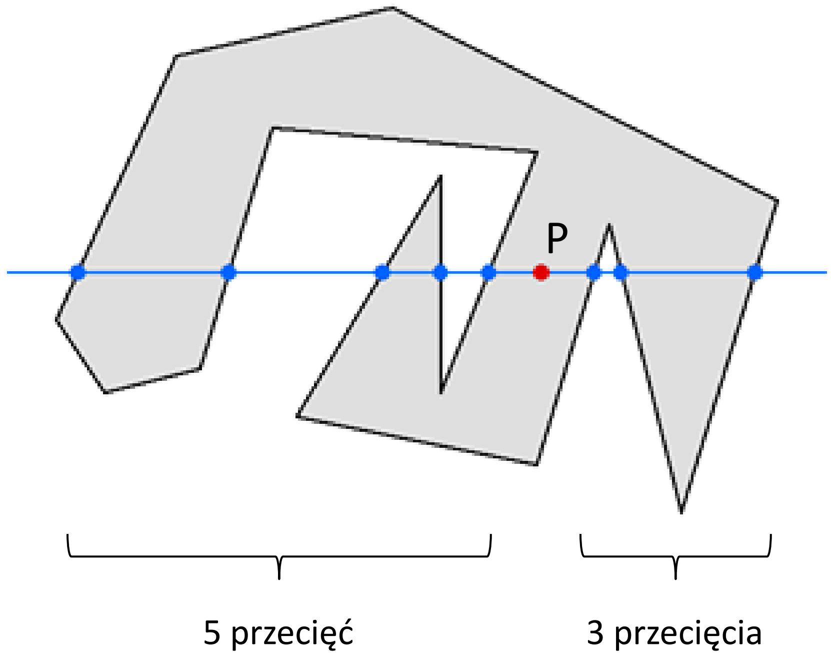
$$t_2 = \frac{W_{t2}}{W}$$

$$\boxed{\begin{cases} t_1 \in \langle 0,1 \rangle \\ t_2 \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow \text{Punkt wewnątrz trójkąta} \\ t_1 + t_2 \in \langle 0,1 \rangle \end{cases}}$$

Część II
Punkt wewnątrz wielokąta

Punkt wewnątrz wielokąta

Test przecięć (1)



1. Należy wyznaczyć **liczbę przecięć** (w prawo lub w lewo) pomiędzy wszystkimi bokami wielokąta a poziomą prostą przechodzącą przez analizowany punkt P.

2. Jeśli liczba przecięć jest:

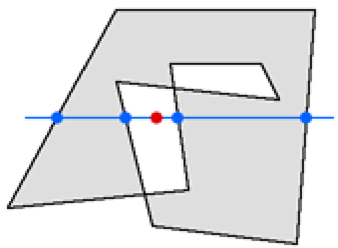
parzysta –> punkt znajduje się **na zewnątrz** wielokąta,
nieparzysta –> punkt znajduje się **wewnątrz** wielokąta.

Punkt wewnątrz wielokąta

Test przecięć (2) – przypadki szczególne

Wielokąt **„nakłada się”**. Obszary nałożone na siebie traktowane są jako **nie należące** do obszaru wielokąta (exclusive OR - XOR).

2 przecięcia

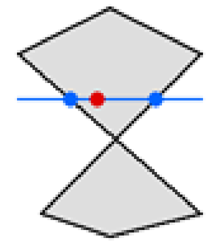


2 przecięcia

Metoda działa poprawnie.

Wielokąt **„przecina się”**. Boki wielokąta przecinają się ale nie ma obszarów nakładających się.

1 przecięcie

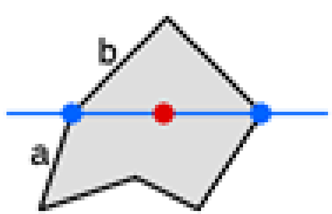


1 przecięcie

Metoda działa poprawnie.

Prosta „testująca” **przechodzi przez wierzchołek**. Miejsce przecięcia należy w takim przypadku do dwóch boków i liczone jest podwójnie.

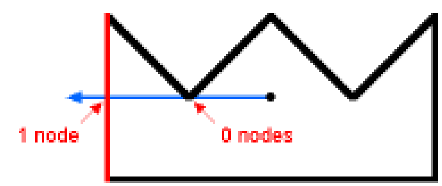
2 przecięcia



2 przecięcia

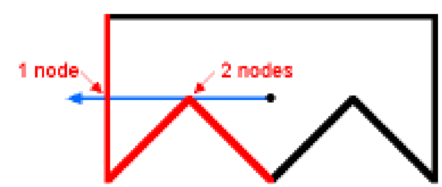
Błąd metody ale można temu zapobiec – uwzględniamy przecięcie tylko jeśli **jeden koniec** boku znajduje się **pod prostą, drugi** koniec **nad lub na prostej**.

Uwzględniając przypadek poprzedni - **1 przecięcie**



Prosta „testująca” przechodzi przez wierzchołek jak poprzednio ale **pozostaje wewnątrz wielokąta.**

Uwzględniając przypadek poprzedni - **3 przecięcia**



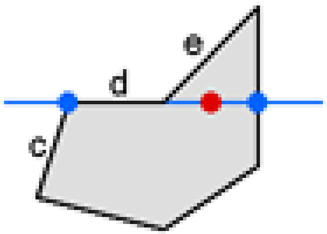
Punkt wewnątrz wielokąta

Test przecięć (3) – przypadki szczególne

Wielokąt posiada boki poziome.

Zgodnie z zastosowanym warunkiem:
uwzględniamy przecięcie tylko jeśli **jeden koniec** boku znajduje się **pod prostą, drugi** koniec **nad lub na prostej**.

1 przecięcie



1 przecięcie

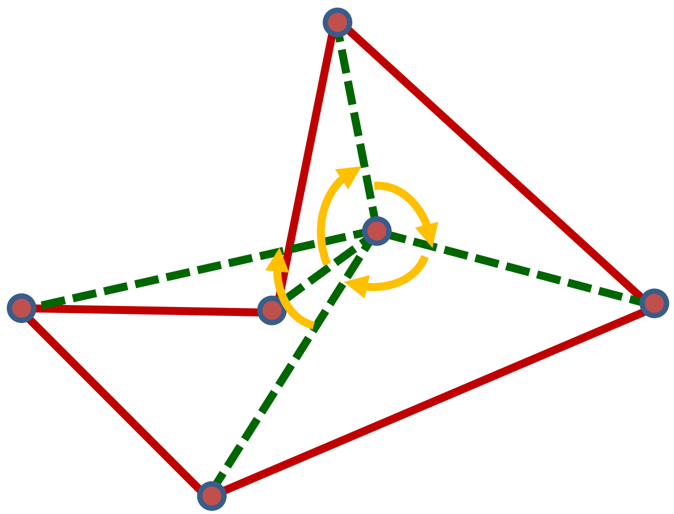
bok c – znajduje sie pod prostą – dodajemy przecięcie,
bok d – na prostej – nie dodajemy przecięcia,
bok e – nad prostą – nie dodajemy przecięcia.

Metoda działa poprawnie.

Punkt wewnątrz wielokąta

Pozostałe metody

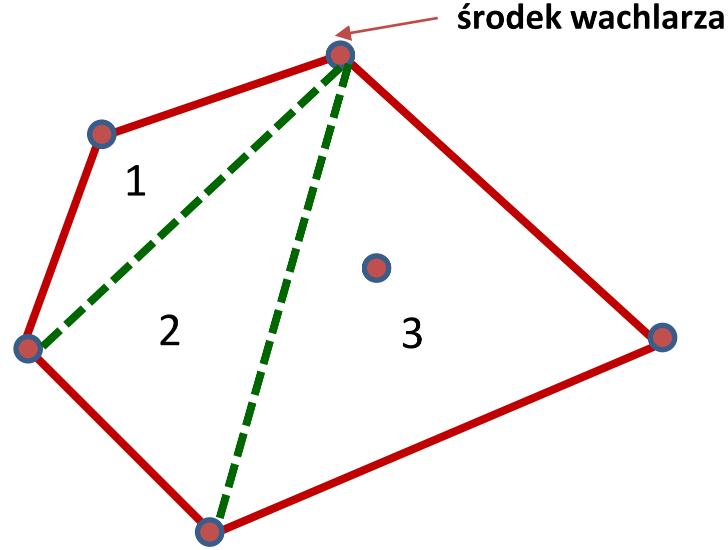
Test sumowania kątów



Jeśli suma kątów = 360:
punkt wewnątrz wielokąta.

Można stosować ten algorytm zarówno dla wielokątów wklęsłych jak i wypukłych.

Test trójkątów



Tworzymy wachlarz trójkątów i sprawdzamy czy punkt znajduje się wewnątrz któregoś z nich.

Punkt wewnątrz któregoś trójkąta:
punkt wewnątrz wielokąta.

Dla wielokątów wklęsłych należy zliczyć liczbę trójkątów, w których znajduje się punkt:

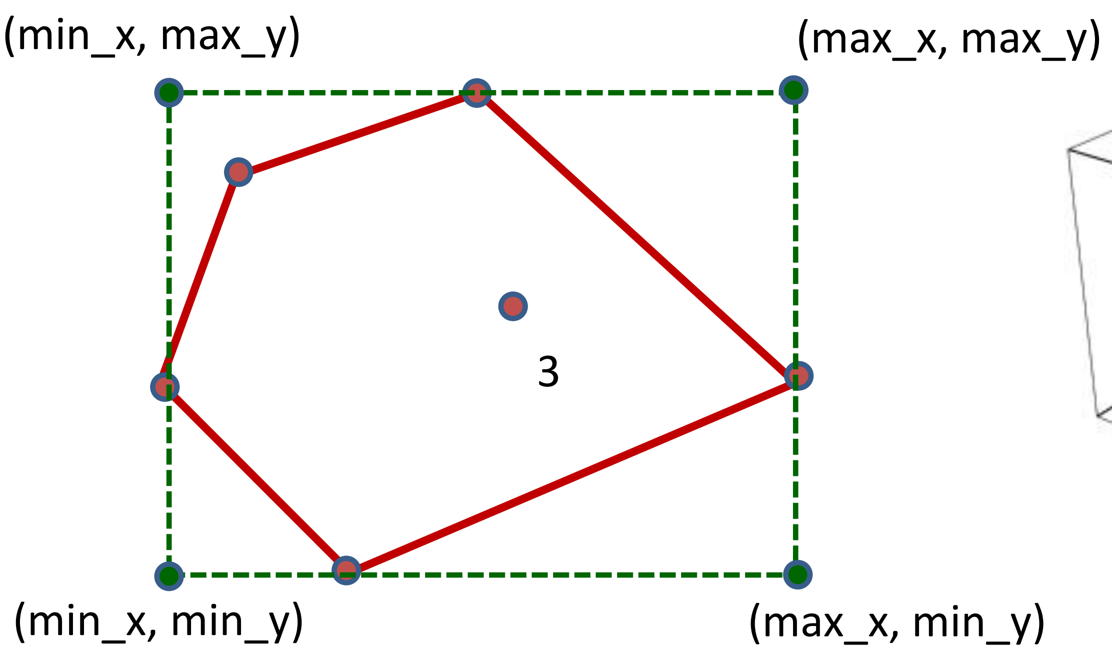
- liczba trójkątów **parzysta**: punkt **na zewnątrz**,
- liczba trójkątów **nieparzysta**: punkt **wewnątrz**.

Część III
Pozostałe aspekty

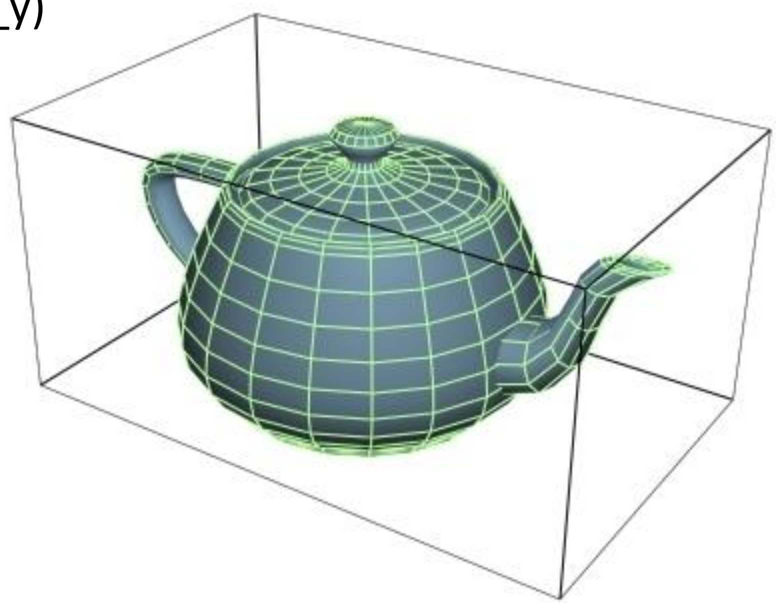
Zawężenie obszaru poszukiwań (1)

Bryła brzegowa

Przed uruchomieniem algorytmów można sprawdzić czy analizowany punkt znajduje się wewnątrz bryły brzegowej (otaczającej) wielokąt (bounding box around). Pozwala to znacznie przyśpieszyć przeszukiwanie.



2D

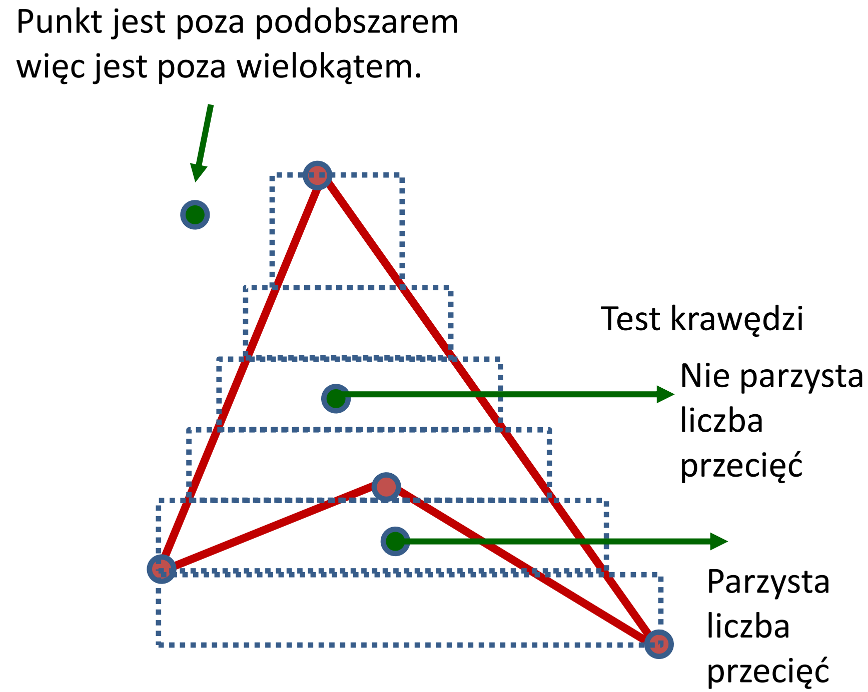


3D

http://www.yaldex.com/games-programming/0672323699_toc.html

https://www.cs.duke.edu/courses/cps124/fall01/projects/midterm/index.html

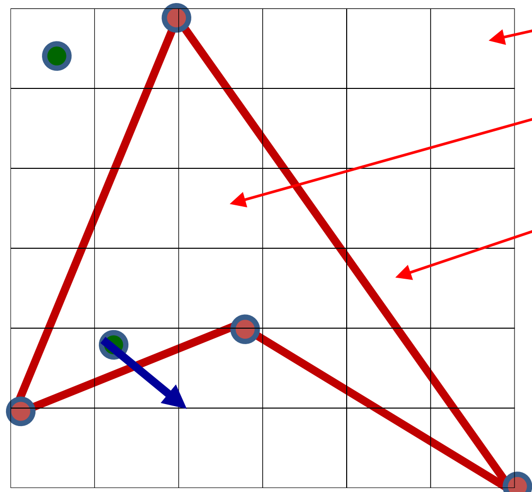
Test poziomych podobszarów



Test „komórek siatki”

Punkt jest w komórce, która została sklasyfikowana jako zewnętrzna.

Komórki: zewnętrzne, wewnętrzne i zawierające boki.



Punkt **„przecina się” z jedną krawędzią w kierunku wierzchołka**, który jest na zewnątrz **->** **punkt jest wewnątrz**.

Dla każdej komórki wybieramy jeden punkt narożny i określamy np. testem krawędzi czy znajduje się poza czy w obszarze danej figury.

Dla danego punktu sprawdzamy czy leży w komórce zewnętrznej, wewnętrznej czy zawierającej boki.

Dla pierwszych dwóch rozwiązanie jednoznaczne.

Jeśli punkt leży w komórce, która zawiera boki to sprawdzana jest **liczba przecięć** linii od punktu to wyznaczonego wcześniej wierzchołka komórki. W zależności od parzystości przecięć określane jest położenie punktu.

Na co należy zwrócić uwagę?

- Problem dokładności reprezentacji liczb rzeczywistych:
  - Np. sumowanie kątów może nie równać się dokładnie 360 stopni.

- Analizowany punkt znajduje się dokładnie na boku wielokąta:
  - Czy punkt znajduje się wtedy wewnątrz czy na zewnątrz?
  - Wynik może być inny dla różnych metod (np. dla wachlarza trójkątów punkt na granicy dwóch trójkątów będzie policzony dwa razy zatem teoretycznie jest poza figurą).

Omawiane problemy mają znaczenie w grafice inżynierskiej np. programach CAD w przypadku grafiki komputerowej stosowanej przy wizualizacji sceny zazwyczaj są ignorowane.