Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Badanie form kwadratowych.

26.01.2022

$A = A^T$

Rozważmy rzeczywistą macierz symetryczną $A = [a_{ij}]$ stopnia n.

Definicja

Funkcję $F(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = [x_1, \dots, x_n] A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

nazywamy formą kwadratową. Macierz symetryczną A nazywamy macierzą formy kwadratowej F.

Określoność formy kwadratowej

Formę kwadratową $F(x_1, \ldots, x_n) = x^T A x$ nazywamy

- dodatnio określoną jeśli $F(x_1, \ldots, x_n) > 0$ dla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- ujemnie określoną jeśli $F(x_1, \ldots, x_n) < 0$ dla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- dodatnio półokreśloną jeśli $F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$;
- ujemnie półokreśloną jeśli $F(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$;
- nieokreśloną, jeśli nie zachodzi żaden z poprzednich warunków.

Wykład XIV. Metody badania określoności formy kwadratowej.

Kryterium wartości własnych

Niech $\lambda_i(A)$ $(i = 1, \ldots, m \leqslant n)$ - wartości własne macierzy A. Wówczas:

- forma dodatnio określoną (tzn. $F(x_1, \ldots, x_n) > 0$) $\iff$ $\lambda_i(A) > 0$;
- forma ujemnie określoną (tzn. $F(x_1, \ldots, x_n) < 0$) $\iff$ $\lambda_i(A) < 0$;
- forma dodatnio półokreśloną (tzn. $F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$) $\iff$ $\lambda_i(A) \geqslant 0$;
- forma ujemnie półokreśloną (tzn. $F(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$) $\iff$ $\lambda_i(A) \leqslant 0$;
- forma nieokreśloną, jeśli nie zachodzi żaden z poprzednich warunków.

Uwaga

Macierz A ma wartość własną 0 $\iff$ $\det A = 0$.

Kryterium Sylvestera

Forma kwadratowa $F(x_1, \ldots, x_n)$ z macierzą $A = [a_{ij}]$ jest dodatnio określoną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące macierzy A są dodatnie, tzn:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, |A| > 0.$$

Kryterium Sylvestera, cd.

Forma kwadratowa $F(x_1, \ldots, x_n)$ z macierzą $A = [a_{ij}]$ jest ujemnie określoną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące macierzy A parzystego stopnia są dodatnie, a nieparzystego – ujemne. tzn:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots, |A| > 0, \quad n-\mathit{liczba\ parzysta}$$

$$|A| < 0 \quad n - \mathit{liczba\ nieparzysta}.$$

Metoda Lagrange'a przejścia do postaci kanonicznej formy kwadratowej.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \rightarrow c_1 y_1^2 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n^2$$

Wykład XIV. Przykład.

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2\alpha x_1x_3 + x_3^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & \alpha \\ 2 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kryterium Sylvestera

$$4 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 4 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 4 & 2 & \alpha \\ 2 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4 - 2\alpha^2 > 0$$

Wniosek

forma kwadratowa dodatnio określoną jeżeli $\alpha^2 < 2$.

Wykład XIV. Przykład. cd.

$\alpha^2 = 2$.

$$\det A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ wartość własna macierzy } A$$

Forma kwadratowa może być: dodatnio półokreśloną; ujemnie półokreśloną; nieokreśloną.

$$\det[A-\lambda E] = \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & \alpha \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3+7\lambda^2+(\alpha^2-10)\lambda+4-2\alpha^2$$

Jeśli $\alpha^2 = 2$, to $W(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 8\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 7\lambda - 8) = 0$. Pierwiastki $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \lambda_3$. Forma dodatnio półokreśloną.

Wykład XIV. Przykład. cd.

$\alpha^2 > 2.$

$$\det A = 4 - 2\alpha^2 < 0$$

Forma nie może być: dodatnio określoną (kryterium Sylvestera);
ujemnie określoną (kryterium Sylvestera, cd.);
dodatnio półokreśloną oraz ujemnie półokreśloną (ponieważ $\lambda = 0$ nie jest wartością własną).
Zostało - forma nieokreślona.

Metoda Lagrange'a przejścia do postaci kanonicznej ?

Przestrzeń Euklidesowa $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym (przykład formy kwadratowej)

$$(x, y) = [x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = X^T Y, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Niech $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operator liniowy, a A - macierz operatora L w bazie standardowej $e_1, \ldots, e_n$.

Definicja

Operator liniowy L nazywamy operatorem symetrycznym jeżeli

$$(Lx, y) = (x, Ly), \qquad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Twierdzenie

Operator L jest operatorem symetrycznym $\iff$ macierz operatora A jest macierzą symetryczną:

$$A = A^T.$$

Dlaczego operator symetryczny???

Fakt

Operator L jest operatorem symetrycznym (macierz A jest macierzą symetryczną) $\iff$ istnieje baza ortonormalna przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych operatora L (macierzy A)

Przestrzeń Euklidesowa $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym (przykład formy kwadratowej)

$$(x, y) = [x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = X^T Y, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Niech $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operator liniowy, a A - macierz operatora L w bazie standardowej $e_1, \ldots, e_n$.

Definicja

Operator liniowy L nazywamy operatorem izometrycznym jeżeli

$$(Lx, Ly) = (x, y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

i operatorem ortogonalnym jeżeli istnieje operator odwrotny L^{-1}.

Twierdzenie

Operator L jest operatorem izometrycznym $\iff$ macierz operatora A spełnia warunek

$$A^T A = E$$

Operator L będzie operatorem ortogonalnym $\iff$

$$A^T A = E, \qquad AA^T = E.$$

Fakt

Dla macierzy A zachodzi

$$A^T = A^{-1}$$

$$A^T A = E, \iff AA^T = E$$

$\iff$ wierszy (kolumny) macierzy A tworzą bazę ortonormalną w $\mathbb{R}^n$.

Macierz A nazywamy macierzą ortogonalną jeżeli $A^T A = E$ i $AA^T = E$.

- niech

$$f_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad f_n = \begin{bmatrix} p_{1n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix}$$

  baza ortonormalna $\mathbb{R}^n$ z wektorów własnych macierzy A (macierzy formy kwadratowej);
- Rozważmy macierz

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

- Macierz P - ortogonalna $\rightarrow P^{-1} = P^T$. Wówczas

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

  bo $Af_j = \lambda_j f_j$;
- Ostatecznie

$$Y^TP^TAPY = [y_1, \dots, y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y$$

Formalności

Ocena końcowa

Ocena końcowa oblicza się według wzoru

$$OK = \frac{2}{3}OE + \frac{1}{3}OZ$$

- Obecność na zajęciach;
- Aktywność na zajęciach;

Terminy egzaminu

- I termin: 31.01, sala 103 A3-A4, 15.00-17.00.
- II termin: 07.02, sala 103 A3-A4, 15.00-17.00
- III termin: 07.02, sala 103 A3-A4, 15.00-17.00

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

IMiIP, IO, 29.01.2019

1. *Znaleźć wartości i wektory własne następującej macierzy A. Obliczyć krotności algebraiczne i geometryczne. Wyznaczyć postać Jordana macierzy A.* (10pt)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. *Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu:*

$$W(z) = z^4 + 4z^3 + 15z^2 + 22z + 30.$$

wiedząc, że $z_1 = -1 + 2i$ *jest jednym z nich, oraz wybierz spośród nich te, które należą do zbioru* $\{z \in \mathbb{C} : \pi < Arg(z) < \frac{3\pi}{2}\}$. (8pt).

3. *Obliczyć wyznacznik, jeśli* $z = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$

$$\begin{vmatrix} z & 1 & z \\ 1 & z^2 & z \\ z & -z & -1 \end{vmatrix} \qquad (8pt)$$

4. *Dla jakich wartości parametru p układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie. Określić liczby rozwiązań w pozostałych przypadkach. (10pt):*

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 7 \\ px + 2y + z = 8 \\ y + pz = 5 \end{cases}$$

5. *Niech operator liniowy L w przestrzeni Euklidesowej* $\mathbf{R}^3$ *jest dany wzorem*

$$L(x, y, z) = (x - y + 2z,\ 3y - z,\ 4z).$$

a) Znaleźć widmo operatora L. Czy operator L jest symetrycznym?
b) Znaleźć jądro operatora L i obliczyć $\dim ImL$.
c) Czy operator L jest różnowartościowym? Czy jest izomorfizmem?
d) Czy operator L jest diagonalizowalnym? (10pt).

6. *Za pomocą kryterium Sylvestera sprawdzić określoność formy kwadratowej:*

$$f(x, y, z) = -5x^2 - 2y^2 - 10z^2 + 2xy - 12xz + 6yz. \qquad (6pt)$$

7. *Niech* $\vec{h} = (1, 0, 1)$ *będzię wektorem presztrzeni Euklidesowej* $\mathbf{R}^3$. *Natomiast V podprzestrzeń* $\mathbf{R}^3$ *z bazą* $\vec{u}_1 = (2, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$ *oraz M podprzestrzeń* $\mathbf{R}^3$ *z bazą* $\vec{v}_1 = (-1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$

Wykład XIV. Przykładowe zadania.

1. *Znaleźć wartości i wektory własne następującej macierzy A. Obliczyć krotności algebraiczne i geometryczne. Wyznaczyć postać Jordana macierzy A.* (10pt)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det[A - \lambda E] = 0 \rightarrow (2-\lambda)^3 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \rightarrow k_a(2) = 3.$$

$k_g(2) = 3 - rz[A - 2E] = 3 - 1 = 2.$

Wektory własne:

$$[A - 2E]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\ker(A - 2E) = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$. Postać Jordana (wykład11) liczba klatek Jordana $J_{k_1}[2], J_{k_2}[2], \ldots$ jest równa $k_g(2) = 2$, tzn mamy $J_{k_1}[2]$ i $J_{k_2}[2]$. Wówczas $k_1 + k_2 = k_a[2] = 3 \rightarrow$

Macierz Jordana

Macierz A jest podobna do macierzy Jordana

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

tzn. $\exists$ P macierz przejścia od bazy standardowej $e_1 \ldots e_n$ do bazy Jordana taka, że

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1} A P$$

wykład 11

5. *Niech operator liniowy L w przestrzeni Euklidesowej* R^3 *jest dany wzorem*

$$L(x, y, z) = (x - y + 2z,\ 3y - z,\ 4z).$$

a) Znaleźć widmo operatora L. Czy operator L jest symetrycznym?
b) Znaleźć jądro operatora L i obliczyć $\dim ImL$.
c) Czy operator L jest różnowartościowym? Czy jest izomorfizmem?
d) Czy operator L jest diagonalizowalnym? (10pt).

Macierz operatora L w bazie standardowej

$$A = A_L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Widmo L?

Widmo $L \iff$ pierwiastki $\det[A_L - \lambda E] = 0 \to (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0 \to \{1, 3, 4\}$.

Symetryczność L?

NIE!, ponieważ $A_L \neq A_L^T$.

Jądro L i dim ImL?

Wykład8! $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \ker L + \dim ImL \to \dim \ker L = 0, \to$
$\dim ImL = 3$.

Operator L różnowartościowy bo $\dim \ker L = 0$; operator L izomorfizm bo $\dim \ker L = 0$ i $ImL = \mathbb{R}^3$; operator L diagonalizowalny ponieważ $k_g(1) = k_a(1), k_g(3) = k_a(3), k_g(4) = k_a(4)$.

6. *Za pomocą kryterium Sylvestera sprawdzić określoność formy kwadratowej:*

$$f(x, y, z) = -5x^2 - 2y^2 - 10z^2 + 2xy - 12xz + 6yz. \qquad (6pt)$$

Macierz formy kwadratowej

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -6 & 3 & -10 \end{bmatrix} \to -5 < 0, \quad \det \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 9 > 0, \ \det A = -9 < 0$$

7. *Niech* $\vec{h} = (1, 0, 1)$ *będzię wektorem presztrzeni Euklidesowej* $\mathbf{R}^3$. *Natomiast* V *podprzestrzeń* $\mathbf{R}^3$ *z bazą* $\vec{u}_1 = (2, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$ *oraz* M *podprzestrzeń* $\mathbf{R}^3$ *z bazą* $\vec{v}_1 = (-1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$. *Do której z podprzestrzeni* V *czy* M *odległość wektora* $\vec{h}$ *jest mniejsza? (8pt)*

Wykład12!

Niech $f_1, f_2, \ldots f_m$ *jest bazą podprzestrzeni* $W \subset V$. *Wówczas:*

$$\delta(h, W) = min_{g \in W} \|h - g\| = \frac{G[h, f_1, \ldots f_m]}{G[f_1, \ldots f_m]}.$$

$$\delta(h, V) = \frac{G[h, u_1, u_2]}{G[u_1, u_2]} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Q&A

Powodzenia na Egzaminie!