Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Macierz przekształcenia liniowego

Wykład VIII. Izomorfizm. Przypomnienie

Wniosek I.

Każda przestrzenia liniowa U wymiaru $\dim U = n$ jest izomorficzna do przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$).

Wniosek II.

Mamy: przekształcenie liniowe $L : U \to V$, gdzie $\dim U = n$, $\dim V = m$.
Istnieje izomorfizm $T_n : U \to \mathbb{R}^n$. Podobnie, istnieje izomorfizm $T_m : V \to \mathbb{R}^m$
Odwzorowanie $\hat{L} = T_m L T_n^{-1}$ będzie przekształceniem liniowym z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

Ważny Wniosek.

Badanie przekształcenia liniowego $L : U \to V$ jest równoważne do badania przekształcenia liniowego $\hat{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Niech wekrory $f_1, f_2, \ldots f_n$ jest bazą przestrzeni liniowej U. Wówczas, dla każdego $f \in U$ istnieją jednoznacznie określone liczby $c_1, c_2, \ldots, c_n$ takie że

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$$

Uwaga

Liczby $c_1, c_2, \ldots c_n$ nazywamy współrzędnymi wektora f w bazie $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Izomorfizm T_n

$$T_n f = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Wykład VII. Przypomnienie

Twierdzenie.

Wektory

$$
\begin{aligned}
f_1 &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots x_{1n}) \\
f_2 &= (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots x_{2n}) \\
f_3 &= (x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots x_{3n}) \\
&\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
f_n &= (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots x_{nn})
\end{aligned}
$$

jest bazą $\mathbb{R}^n \iff$

$$
\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nn}
\end{vmatrix} \neq 0.
$$

Macierz przekształcenia liniowego

Przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

- *Niech* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *baza w* $\mathbb{R}^n$;
- *Niech* $g_1, g_2, \ldots g_m$ *baza w* $\mathbb{R}^m$;

$$\begin{array}{c} L(f_1) = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \ldots a_{m1}g_m \\ L(f_2) = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + \ldots a_{m2}g_m \\ \vdots \\ L(f_n) = a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + \ldots a_{mn}g_m \end{array} \tag{1}$$

Macierz przekształcenia liniowego

Macierzą przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ w bazach $f_1, \ldots f_n$ i $g_1, \ldots g_m$ jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Uwaga

i-ty wiersz w (1) $\Longrightarrow$ i-ta kolumna w (2).

$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$L(x,y,z) = (x,y,0), \quad \text{baza} \quad f_1 = (1,2,0),\ f_2 = (0,-1,1),\ f_3 = (0,2,-1)$$

oraz

$$g_1 = (1,1,1), \qquad g_2 = (1,0,0), \qquad g_3 = (1,1,0).$$

Krok I. $L(f_1) = (1,2,0), \quad L(f_2) = (0,-1,0), \quad L(f_3) = (0,2,0).$
krok II(1). $L(f_1) = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + a_{31}g_3 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1 \\ a_{11} + a_{31} = 2 \\ a_{11} = 0 \end{cases} \Longrightarrow a_{11} = 0,\ a_{21} = -1,\ a_{31} = 2.$$

Wykład IX. Przykład.

$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$L(x, y, z) = (x, y, 0), \quad \text{baza} \quad f_1 = (1, 2, 0),\ f_2 = (0, -1, 1),\ f_3 = (0, 2, -1)$$

oraz

$$g_1 = (1, 1, 1), \qquad g_2 = (1, 0, 0), \qquad g_3 = (1, 1, 0).$$

Krok I. $L(f_1) = (1, 2, 0), \quad L(f_2) = (0, -1, 0), \quad L(f_3) = (0, 2, 0).$
krok II(2). $L(f_2) = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + a_{32}g_3 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} + a_{32} = 0 \\ a_{12} + a_{32} = -1 \\ a_{12} = 0 \end{cases} \Longrightarrow a_{12} = 0,\ a_{22} = 1,\ a_{32} = -1.$$

$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$L(x,y,z) = (x,y,0), \quad \text{baza} \quad f_1 = (1,2,0),\ f_2 = (0,-1,1),\ f_3 = (0,2,-1)$$

oraz

$$g_1 = (1,1,1), \qquad g_2 = (1,0,0), \qquad g_3 = (1,1,0).$$

Krok I. $L(f_1) = (1,2,0), \quad L(f_2) = (0,-1,0), \quad L(f_3) = (0,2,0).$
krok II(3). $L(f_3) = a_{13}g_1 + a_{23}g_2 + a_{33}g_3 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a_{13} + a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{13} + a_{33} = 2 \\ a_{13} = 0 \end{cases} \Longrightarrow a_{13} = 0,\ a_{23} = -2,\ a_{33} = 2.$$

Wykład IX. Przykład I.

$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$L(x,y,z) = (x,y,0), \quad \text{baza} \quad f_1 = (1,2,0),\ f_2 = (0,-1,1),\ f_3 = (0,2,-1)$$

oraz

$$g_1 = (1,1,1), \qquad g_2 = (1,0,0), \qquad g_3 = (1,1,0).$$

Macierz przekształcenia liniowego:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.}$$

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

$L(x, y) = (x+y, 3x-y, 2x-y)$, W bazach standardowych $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (0, 1)$,

$g_1 = (1, 0, 0)$, $g_2 = (0, 1, 0)$, $g_3 = (0, 0, 1)$.

Krok I. $L(f_1) = (1, 3, 2)$, $L(f_2) = (1, -1, -1)$.

Macierz przekształcenia liniowego:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.}$$

Wykład IX. Przykład II.

$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$L(x,y) = (x+y, 3x-y, 2x-y)$, W bazach standardowych $f_1 = (1,0)$, $f_2 = (0,1)$,

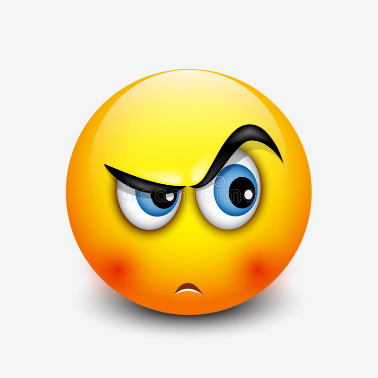
$g_1 = (1,0,0)$, $\qquad g_2 = (0,1,0)$, $\qquad g_3 = (0,0,1)$.

Dlaczego tak łatwo w bazach standardowych?

Krok I. $L(f_1) = (1,3,2)$, $\quad L(f_2) = (1,-1,-1)$.
Krok II.

$$L(f_1) = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + a_{31}g_3 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}) = (1,3,2)$$

$$L(f_2) = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + a_{32}g_3 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (1,-1,-1).$$



Rysunek: Dlaczego macierz przekształcenia liniowego?

Dlaczego macierz przekształcenia liniowego?

Jest:

- *Przekształcenie liniowe* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$;
- *baza* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *w* $\mathbb{R}^n$;
- *baza* $g_1, g_2, \ldots g_m$ *w* $\mathbb{R}^m$

Dla każdego

$$f \in \mathbb{R}^n, \qquad f = c_1 f_1 + \ldots c_n f_n,$$

gdzie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *- współrzędne wektora* f *w bazie* $f_1, f_2, \ldots, f_n$.
Wiemy że $L(f) = g$, *gdzie*

$$g \in \mathbb{R}^m, \qquad g = d_1 g_1 + \ldots d_m g_m,$$

gdzie $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *- współrzędne wektora* g *w bazie* $g_1, g_2, \ldots, g_m$.

Wykład IX. Dlaczego macierz przekształcenia liniowego?

Twierdzenie. Ważne!

$$L(f) = g \iff$$

$$A\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

gdzie A - macierz przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ w bazach $f_1, \dots f_n$ i $g_1, \dots g_m$.

Wniosek

Własności $L \iff$ własności macierzy A operatora liniowego.

Idea dowodu.

$$L(f) = c_1 L(f_1) + \ldots + c_n L(f_n) = c_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i1} g_i + \ldots + c_n \sum_{i=1}^{m} a_{in} g_i =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} c_j \right) g_1 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} c_j \right) g_m \implies$$

$$d_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} c_j, \quad d_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} c_j, \quad \ldots \quad d_m = \sum_{j=1}^{n} a_{mj} c_j.$$

Jądro i obraz.

Niech $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - przekształcenie liniowe. Jądro i obraz przekształcenia liniowego:

$$\ker L = \{f \in \mathbb{R}^n \ : \ L(f) = 0\}, \ Im\ L = \{g = L(f) \ : \ \forall f \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wymiar obrazu i jądra

$$\dim Im\ L = \text{rz } A_L, \qquad \dim\ker\ L = n - \text{rz } A_L$$

gdzie A_L - macierz przekształcenia liniowego L.

Twierdzenie

Niech $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest przekształceniem liniowym a A_L -jego macierz. Następujące warunki są równoważne.

- L jest izomorfizmem;
- $n = m \;\wedge\; \operatorname{rz} A_L = n$;
- $n = m \;\wedge\; \det A_L \neq 0$.

Wykład IX. Przykład I. Ponownie

$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$L(x,y,z) = (x,y,0), \quad \text{baza} \quad f_1 = (1,2,0),\ f_2 = (0,-1,1),\ f_3 = (0,2,-1)$$

oraz $g_1 = (1,1,1), \quad g_2 = (1,0,0), \quad g_3 = (1,1,0).$

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$n = m = 3, \ \det A = 0, \ \dim\ker\ L = 3 - \mathrm{rz}\ A_L = 3 - 2 = 1.$

Przekształcenie liniowe L nie jest izomorfizmem; nie jest różnowartościowym.

Wykład IX. Przykład II. ponownie

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

$L(x, y) = (x+y, 3x-y, 2x-y)$, W bazach standardowych $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (0, 1)$,

$g_1 = (1, 0, 0)$, $g_2 = (0, 1, 0)$, $g_3 = (0, 0, 1)$.

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$n = 2 \neq 3 = m$, $\operatorname{rz} A_L = 2$, $\dim \ker L = 2 - 2 = 0$

Przekształcenie liniowe L nie jest izomorfizmem, ale jest różnowartościowym.

Niech $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - przekształcenie liniowe.

Wartością własną przekształcenia liniowego L nazywamy liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ dla której istnieje niezerowy wektor $f \in \mathbb{R}^n$ spełniający warunek:

$$L(f) = \lambda f. \tag{3}$$

Zbiór wszystkich wartości własnych $\{\lambda_1, \dots \lambda_m\}$ nazywamy widmem operatora L i oznaczamy $\sigma(L)$.

Uwaga 1

Każdy niezerowy wektor $f \in \mathbb{R}^n$ z (3) nazywamy wektorem własnym operatora L odpowiadającym wartości własnej λ.

Uwaga 2

Podprzestrznią liniową $\ker(L - \lambda I) = \{f \in \mathbb{R}^n \; : \; L(f) = \lambda f\}$ nazywamy podprzestrznią liniową wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ.

Krotności wartości własnych.

Krotność geometryczna $k_g(\lambda)$

$$k_g(\lambda) = \dim \ker(L - \lambda I)$$

Krotność algebraiczna $k_a(\lambda)$ to

$$k_a(\lambda) = \dim \ker(L - \lambda I)^n \quad \Longrightarrow \quad k_a(\lambda) \geqslant k_g(\lambda).$$

Twierdzenie 1.

λ - wartość własna operatora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \iff$

$$\det[A_L - \lambda E] = 0$$

(tzn., λ - pierwiastek wielomianu charakterystycznego $\det[A_L - \lambda E]$).

Twierdzenie 2.

Niech $\lambda \in \sigma(L)$ - wartość własna operatora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Krotność geometryczna $k_g(\lambda)$ *to*

$$k_g(\lambda) = \dim\ker(L - \lambda I) = n - \mathrm{rz}\,[A_L - \lambda E]$$

Krotność algebraiczna $k_a(\lambda) = \dim\ker(L - \lambda I)^n$ *jest równa krotności algebraicznej* λ *jak pierwiastka wielomianu charakterystycznego* $\det[A_L - \lambda E]$.

Q&A

Dziękuję za Uwagę!