Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Układy równań liniowych

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots x_n$ nazywamy układ postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$.

Wykład V. Układy równań liniowych.

Postać macierzowa układu (1).

$$\textit{układ} \quad (1) \quad \iff \quad A \cdot X = B.$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Uwaga

A - macierz główna układu (1),
X - macierz niewiadomych, B - macierz wyrazów wolnych

Definicja. Minor macierzy stopnia k

Niech A macierz wymiaru $m \times n$ oraz $1 \leqslant k \leqslant \min(n, m)$. Minorem stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k stworzonej z elementów k wybranych wierszy oraz k wybranych kolumn macierzy A.

Definicja.

Niech A macierz wymiaru $m \times n$. Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.

Rząd macierzy A oznaczamy przez $\operatorname{rz} A$. Rząd macierzy zerowej jest 0.

Niecz $A \cdot X = B$ – postać macierzowa układu równań (1). Macierz

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right].$$

nazywamy macierzą rozszerzoną układu (1).

Twierdzenie Kroneckera-Capellego.

Układ równań liniowych (1) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy głównej układu A jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej $[A|B]$ tego układu, tzn.

$$rz\ A = rz\ [A|B].$$

Wykład V. Wnioski z dowodu Twierdzenia Kroneckera-Capellego.

Mamy układ równań $A \cdot X = B$.

Układ sprzeczny

rz $A \neq$ rz $[A|B]$

Układ oznaczony

rz $A =$ rz $[A|B] = n$.

Układ nieoznaczony

rz $A =$ rz $[A|B] = r < n$

$\Longrightarrow$ Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów!

Metoda największego minora.

I krok. *Szukamy niezerowy minor stopnia* $r = \text{rz}\, A = \text{rz}\, [A|B] \leqslant n$;

II krok. *Usunięcie wszystkich wierszy układu* (1) *znajdujących się poza wyróżnionym minorem;*

III krok. *Utworzenie i rozwiązanie układu Cramera z* r *niewiadomymi oraz* $n - r$ *parametrami.*

Wykład VI. Czego nam jeszcze brakuje?

Jak szybko obliczyć rząd macierzy?

Definicja macierzy schodkowej.

Macierz A nazywamy schodkową gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach.

Bardzo ważne!!!

Rząd macierzy schodkowej jest rowny liczbie jej niezerowych wierszy (tzn. liczbie schodków).

IDEA obliczenia rzędu macierzy A

Może warto przekształczyć macierz A do macierzy schodkowej za pomocą operacji nie zmieniających rzędu macierzy?

Twierdzenie o operacjach nie zmieniających rzędu macierzy.

Podane poniżej operacje elementarne na macierzy nie zmieniają jej rzędu

- zamiana między sobą dowolnych wierszy (kolumn);
- pomnożenie dowolnego wiersza (kolumny) przez liczbę różną od zera;
- dodanie do ustalonego wiersza (ustalonej kolumny) sumy innych wierszy (kolumn) pomnożonych przez dowolne stałe.

Przyklad układu sprzecznego

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 2z = 3, \\ 3x + y + z = 5 \end{cases} \implies [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Wykład VI. Przyklad układu sprzecznego.

Wykład VI. Przyklad układu nieoznaczonego

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2t = 1, \\ 2x + 2z + 3t = -1, \\ 2x + 2z + t = 4 \end{cases} \Longrightarrow [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Wykład VI. Przyklad układu nieoznaczonego

Równoważne układy

Mówimy że układy równanń liniowych

$$AX = B \qquad i \qquad A'X = B'$$

są równoważne jeżeli zbiory ich rozwiązań są identyczne.

Operacje na wierszach macierzy rozszerzonej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ które przekształcają jego do układu równoważnego.

- zamiana między sobą dowolnych wierszy $w_j \iff w_k$;;
- pomnożenie dowolnego wiersza przez liczbę różną od zera;
- dodanie do ustalonego wiersza sumy innych wierszy pomnożonych przez dowolne stałe.
- skreślenie wiersza złożonego z liczb zerowych.

Wykład VI. Metoda eliminacji Gaussa dla układów liniowych.

- dla układu równań liniowych $AX = B$ budujemy macierz roszczerzoną

$$[A|B] = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}}^{\text{niewiadome}} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \end{array};$$

Rysunek: macierz roszczerzona

- dokonujemy operacje elementarne sprowadzając ją do postaci

$$
\begin{array}{rc}
 & \overbrace{x'_1 \quad x'_2 \quad \cdots \quad x'_r}^{\text{niewiadome}} \quad \overbrace{x'_{r+1} \quad \cdots \quad x'_n}^{\text{parametry}} \\
[A'|B'] = & \left[\begin{array}{cccc|ccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & s_{1\,r+1} & \cdots & s_{1n} & z_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & s_{2\,r+1} & \cdots & s_{2n} & z_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & s_{r\,r+1} & \cdots & s_{rn} & z_r \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{r+1}
\end{array}\right],
\end{array}
$$

Rysunek: macierz równoważnego układu

$$
\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1\,r+1} & s_{1\,r+2} & \cdots & s_{1n} \\ s_{2\,r+1} & s_{2\,r+2} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{r\,r+1} & s_{r\,r+2} & \cdots & s_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}
$$

Rysunek: rozwiązania układu $AX = B$.

Wykład VI. Przyklad układu nieoznaczonego. Ponownie.

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2t = 1, \\ 2x + 2z + 3t = -1, \\ 2x + 2z + t = 4 \end{cases} \implies [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

$$\text{rz}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] = \text{rz}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right] \implies$$

$$\text{rz}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & -1 + \frac{15}{2} = \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \to \text{rz}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{4} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right].$$

Wykład VI. Przyklad układu nieoznaczonego. Ponownie.

Niech $x'_1 = x$, $x'_2 = y$, $x'_3 = t$ - niewiadome; $x'_4 = z$ - parametr. Mamy dla zmiennych $x'_1 \ldots x'_4$

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right]$$

Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z \\ -3z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} - z \\ -\frac{1}{2} + 3z \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Z powrotem do równoważnego układu

$$\begin{cases} x = \frac{13}{4} - z, \\ y = -\frac{1}{2} + 3z, \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Q&A

Dziękuję za Uwagę!