Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Układy równań liniowych

Fakt I.

Równanie postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

gdzie $a_i \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ nazywamy równaniem liniowym o n niewiadomych $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$

Fakt II.

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots x_n$ nazywamy układ postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$.

.

Uwaga

Układ (1) jednorodny $\iff$ $b_1 = b_2 \ldots b_m = 0$
Układ (1) niejednorodny $\iff$ $\exists\ b_i \neq 0$.

Fakt III.

Rozwiązaniem układu (1) nazywamy ciąg liczb rzeczywistych $x_1, \dots x_n$ po podstawieniu których do (1) otrzymujemy równość.

Fakt IV

- Układ (1) oznaczony $\iff$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x_1, \dots x_n$;
- Układ (1) nieoznaczony $\iff$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań $x_1, \dots x_n$;
- Układ (1) sprzeczny $\iff$ nie istnieje rozwiązań $x_1, \dots x_n$

Uwaga

Układ (1) jednorodny $\iff$ oznaczony lub nieoznaczony.

Układ oznaczony

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

Wykład V. Układy równań liniowych.

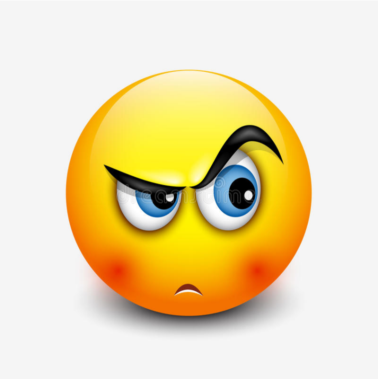
Układ nieoznaczony

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2, \end{cases}$$

Układ sprzeczny

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

Jak znaleźć rozwiązanie układu (1)?



Rysunek: może MACIERZY?

Postać macierzowa układu (1).

$$\textit{układ} \quad (1) \quad \iff \quad A \cdot X = B.$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Uwaga

A - macierz główna układu (1),
X - macierz niewiadomych, B - macierz wyrazów wolnych

Układ Cramera

Układ (1) nazywamy układem Cramera jeśli A - macierz kwadratowa (tzn., $m = n$) i nieosobliwa (tzn. $\det A \neq 0$).

Twierdzenie.

Układ Cramera jest układem oznaczonym i

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Twierdzenie.

Rozwiązanie $x_1, \dots, x_n$ *układu Cramera jest określone wzorem:*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

gdzie

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots \ \det A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Wykład V. Wzory Cramera. Szkic dowodu.

10. 11. 2021

Układ n równań i n niewiadomych, ale nie układ Cramera, co będzie?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = \cancel{1}\,2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

Definicja. Minor macierzy stopnia k

Niech A macierz wymiaru $m \times n$ oraz $1 \leqslant k \leqslant \min(n, m)$. Minorem stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k stworzonej z elementów k wybranych wierszy oraz k wybranych kolumn macierzy A.

Definicja.

Niech A macierz wymiaru $m \times n$. Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.

Rząd macierzy A oznaczamy przez $\operatorname{rz} A$. Rząd macierzy zerowej jest 0.

Własności rzędu macierzy A

- rząd macierzy kwadatowej A stopnia n jest: $\operatorname{rz} A = n$ gdy $\det A \neq 0$ i $\operatorname{rz} A < n$ gdy $\det A = 0$;
- dla macierzy A wymiaru $m \times n$, $\quad 1 \leqslant \operatorname{rz} A \leqslant \min(m, n)$;
- $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} A^T$;
- rząd macierzy trójkątnej jest równy liczbie jej niezerowych elementów na głównej przekątnej.

Wykład V. Rząd macierzy A?.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Niecz $A \cdot X = B$ – postać macierzowa układu równań (1). Macierz

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right].$$

nazywamy macierzą rozszerzoną układu (1).

Twierdzenie Kroneckera-Capellego.

Układ równań liniowych (1) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy głównej układu A jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej $[A|B]$ tego układu, tzn.

$$rz\ A = rz\ [A|B].$$

Mamy układ równań $A \cdot X = B$.

Układ sprzeczny

$\text{rz } A \neq \text{rz } [A|B]$

Układ oznaczony

$\text{rz } A = \text{rz } [A|B] = n.$

Układ nieoznaczony

$\text{rz } A = \text{rz } [A|B] = r < n$

$\Longrightarrow$ Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

Metoda największego minora.

I krok. *Szukamy niezerowy minor stopnia* $r = rz\, A = rz\, [A|B] \leqslant n$;

II krok. *Usunięcie wszystkich wierszy układu* (1) *znajdujących się poza wyróżnionym minorem;*

III krok. *Utworzenie i rozwiązanie układu Cramera z* r *niewiadomymi oraz* $n - r$ *parametrami.*

Przykład

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3, \\ 3x + 5y - 2z = 4, \\ 2x - 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

Wykład V. Przykład.

Q&A

Dziękuję za Uwagę!