Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Wyznaczniki, macierz odwrotna

Fakt I.

Wyznacznik macierzy kwadratowej A mającej wierz zerowy (kolumnę zerową) jest równy zero.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Fakt II.

Wyznacznik macierzy kwadratowej A zmieni znak jeżeli przestawimy między sobą dwie kolumny (dwa wiersze)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Fakt II. Szkic dowodu.

Fakt III.

Wyznacznik macierzy kwadratowej A mającej jednakowe kolumny (wierszy) jest równy 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a_{13} \\ b & b & a_{23} \\ c & c & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Wykład IV. Własności wyznaczników.

Fakt IV.

Jeżeli elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) zawierają wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Fakt V.

Wyznacznik macierzy w której elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) są sumami dwóch składników jest równy sumie wyznaczników.

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}+a & \tilde{b}+b & \tilde{c}+c \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Fakt VI.

Wyznacznik nie zmieni się jeżeli do elementów dowolnej kolumny (dowolnego wiersza) dodać odpowiadające im elementy innej kolumny (innego wiersza) tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} & a_{13}+ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \underbrace{\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{=0}.$$

Fakt VI. Szkic dowodu.

Fakt VII.

$$\det A = \det A^T.$$

Fakt VIII.

A i B macierzy kwadratowe stopnia n

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B.$$

Macierz trójkątna dolna

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Znaleźć $|A^{2020}|$.

$|A^{2020}| = |A|^{2020} \implies |A|?$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ((-1)K_2 + K_3 \rightarrow K_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$((-1)K_1 + K_2 \rightarrow K_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Macierz odwrotna

A - macierz kwadratowa stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz A^{-1} która spełnia warunek

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

Macierz A nazywamy macierzą odwracalną jeżeli istnieje A^{-1}.

Nie zawsze istnieje macierz odwrotna!

A odwracalna macierz stopnia $n \Longrightarrow A^{-1}$ - macierz stopnia n.

Jeżeli A^{-1} istnieje to A^{-1} określona jednoznacznie

A odwracalna $\implies A^{-1}$ odwracalna

Wykład IV. Macierz odwrotna

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Jeśli $A \cdot B = I_n \implies A^{-1} = B$.

Twierdzenie

Macierz A jest odwracalną $\iff$ $\det A \neq 0$.

Szkic dowodu

Odwracalność macierzy $A \implies \exists\, A^{-1} \implies A \cdot A^{-1} = I \implies |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \implies |A| \neq 0$.

Odwrotnie jak $\det A \neq 0$, czy istnieje A^{-1}?

Niech

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozwinięcie Laplace'a

$$\boxed{a_{1j}D_{1p} + a_{2j}D_{2p} + \ldots + a_{nj}D_{np} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}D_{kp} = \begin{cases} \det A, & j = p \\ 0, & j \neq p \end{cases}}$$

Wykład IV. Szkic dowodu. CD.

Jeżeli $\det A \neq 0$, to

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T .$$

Wykład IV. Szkic dowodu. CD.

Własności

- Niech $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0 \implies (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
- $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$;
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$;
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$A \cdot X = B.$

Jeśli $\det A \neq 0 \implies \exists$ rozwiązanie

$$X = A^{-1}B$$

Jeśli $\det A = 0$ i $\det B \neq 0$ rozwiązanie nie istnieje (dlaczego?)

Jeśli $\det A = 0$ i $\det B = 0$ co będzie?

Wykład IV. Przykład.

Macierz odwrotna dla $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \wedge \det A = ad - bc \neq 0 \implies A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Wykład IV. Równanie macierzowe. Przykład.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \implies I_n \cdot X = A^{-1} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies$$

$$X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Rysunek: NIE WOLNO!

Dziękuję za Uwagę!