Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Algebra

dr hab. Sergiusz Kużel, prof. AGH

Formalności

Na koniec semestru – egzamin, 3 terminy

Ocena końcowa oblicza się według wzoru

$$OK = \frac{2}{3}OE + \frac{1}{3}OZ$$

- Obecność na zajęciach;
- Aktywność na zajęciach;

Terminy konsultacji

??????????

Książki, które powinien przeczytać każdy student IO.

Tereza Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas

- Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory;
- Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania;

Rysunek:

Zestawy zadań z algebry – do rozwiązania!!!

Zadanie 1. Oblicz

$$\text{a)}(-3+3i)+(5-6i),\quad \text{b)}(7i+9)-(3-16i),\quad \text{c)}\Big(\frac{3}{2}+3i\Big)\cdot(8-6i),\quad \text{d)}\frac{2-3i}{5+4i}.$$

Zadanie 2. Niech $z=2+3i$, $u=3-i$, $w=2+2i$. Oblicz

$$\text{a)}2w-z,\quad \text{b)}\overline{w}+uz,\quad \text{c)}z^2-u\quad \text{d)}2\overline{u}-w+3zwu,\quad \text{e)}\overline{w^3}-2u+z,$$

$$\text{f)}z+w^2u^2,\quad \text{g)}\frac{\overline{z+w}}{u},\quad \text{h)}\frac{z^2}{w^2},\quad \text{i)}\frac{uwz}{zwu}.$$

Zadanie 3. Znajdź rozwiązanie równania na płaszczyźnie zespolonej:

$$\text{a)}z^2+6z+5=0,\quad \text{b)}z^2+5z+9=0,\quad \text{c)}z^3+6z^2+2z+12=0,\quad \text{d)}z^4+4z^2+3=0,$$

$$\text{e)}z^4+5z^2+6=0.$$

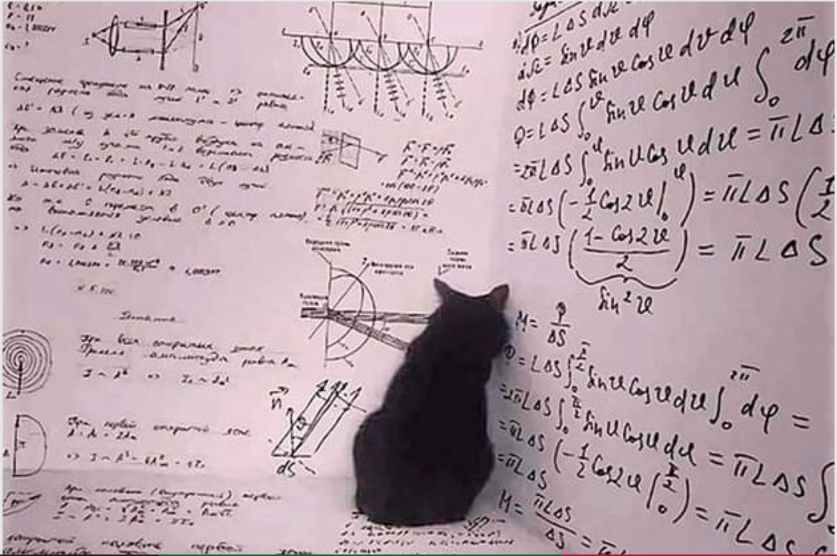
Zadanie 4. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej następujące zbiory:

$$\text{a)}\{z\in\mathbb{C}\colon |z+1-2i|=3\},\quad \text{b)}\{z\in\mathbb{C}\colon \frac{\pi}{6}<\arg z\leqslant\frac{2\pi}{3}\},\quad \text{c)}\{z\in\mathbb{C}\colon \arg(z+2-i)=\pi\},$$

$$\text{d)}\{z\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Im}z\neq 2\wedge \operatorname{Re}z=4\},\quad \text{e)}\{z\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}z>2\},\quad \text{f)}\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=3\},\quad \text{g)}\{z\in\mathbb{C}\colon z\overline{z}=0\},$$

$$\text{h)}\{z\in\mathbb{C}\colon \overline{z}=-z\},\quad \text{i)}\{z\in\mathbb{C}\colon 2z+i=8\},\quad \text{j)}\{z\in\mathbb{C}\colon z^4=1\},\quad \text{k)}\{z\in\mathbb{C}\colon (z-1+2i)^2=9\},$$

A co to jest?



Wykład I. Liczby Zespolone. Pojęcia wstępne.

Zbiór liczb naturalnych

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots 2020, 2021, \ldots\}$$

Zbiór liczb całkowitych

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2020, \ldots -1, -2, 0, 1, 2, 3, \ldots 2020, 2021, \ldots\}$$

Zbiór liczb wymiernych

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \quad : \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

Symboli matematyczne.

$\forall$ dla każdego; $\Rightarrow$ wynika; $\in$ należy; $\notin$ nie należy; $\exists$ istnieje.

Zbiór liczb rzeczywistych???

Liczba $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716 9\ldots \notin \mathbb{Q}$ tzn π jest liczbą niewymerną ale π ma stosunek do rzeczywistości:

Rysunek:

Jeśli średnica koła jest 1, jego obwód wynosi π.

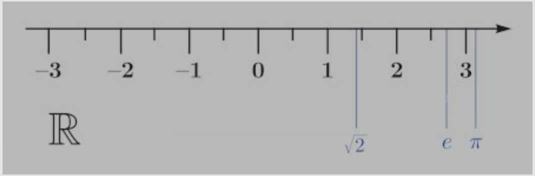
$\Rightarrow \ \exists$ liczby niewymierne: π, $\sqrt{2}$, ...

Różne definicji?! liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$:

1. Zbiór liczb rzeczywistych, to zbiór wszystkich liczb - wymiernych i niewymiernych;
2. Zbiór liczb rzeczywistych – rozszerzenie zbioru liczb wymiernych do przestrzeni zupełnej;
3. Zbiór liczb rzeczywistych – rozszerzenie zbioru liczb wymiernych do przestrzeni spójnej;
4. Zbiór liczb rzeczywistych jest ciałem uporządkowanym spełniającym aksjomat ciągłości.

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$

Modelem geometrycznym zbioru liczb rzeczywistych jest tzw. prosta rzeczywista, czyli oś liczbowa.

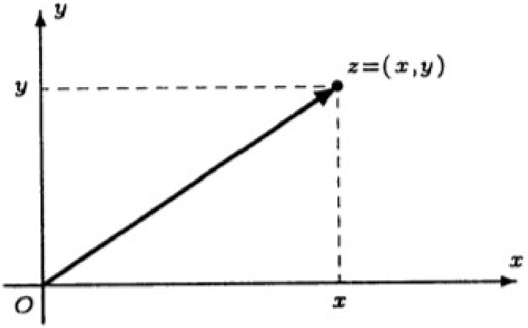


Rysunek:

liczba rzeczywista $x \iff$ punkt x osi liczbowej.

Idea

$$\boxed{\text{liczba zespolona } z \iff \text{punkt } z = (x, y) \text{ płaszczyzny Euklidesowej}}$$



Rysunek:

Definicja

Liczbą zespoloną z nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych (x, y).

Mamy zatem

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}\}.$$

płaszczyzna Euklidesowa $\iff$ płaszczyzna licz zespolonych $\iff$ płaszczyzna zespolona $\mathbb{C}$.

Fakt 1.

Każda liczba rzeczywista jest liczbą zespoloną:

$$x \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad x = (x, 0) \in \mathbb{C}.$$

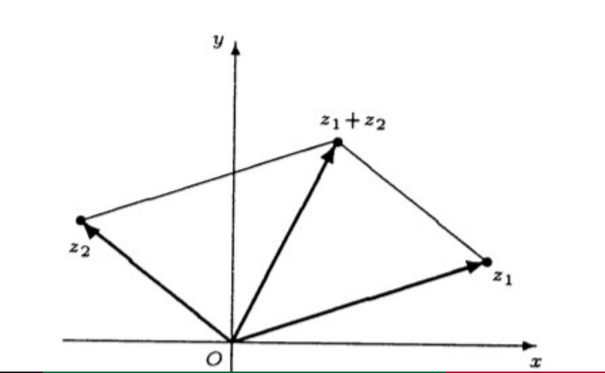
Wykład I. Suma Liczb Zespolonych.

Definicja sumy

Niech $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. Wówczas

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Interpretacja geometryczna



Definicja iloczynu

Niech $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. Wówczas

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, \quad x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Własności iloczynu i sumy:

- Przemienność

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \qquad z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

- Łączność

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3, \qquad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3.$$

Przykład. Obliczyć $5z$, gdzie $z = (x, y)$:

$5 \to (5, 0) \;\Rightarrow$

$$5z = (5, 0) \cdot (x, y) = (5 \cdot x - 0 \cdot y, \quad 5 \cdot y + 0 \cdot x) = (5 \cdot x, 5 \cdot y)$$

Fakt 2.

$$(1, 0) \cdot (1, 0) = (1, 0) = 1, \qquad (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Jednostka urojona

Liczbę zespoloną $z = (0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną i oznaczamy ją przez i:

$$\mathrm{i} = (0, 1).$$

Z Faktu 2 dostajemy $\mathrm{i}^2 = -1$.

Wykład I. Postać Algebraiczna Liczb Zespolonych.

Część rzeczywista *Re z*; Część urojona *Im z* liczby zespolonej *z*

Niech $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Wówczas $Re\ z = x, \quad Im\ z = y$.

Postać algebraiczna.

Niech $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Wówczas

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + \mathrm{i}y = \mathrm{Re}\ z + \mathrm{i}\mathrm{Im}\ z.$$

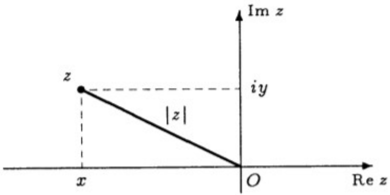
Uwaga.

Dodawanie i mnożenie liczb w postaci algebraicznej wykonujemy tak jak dodawanie i mnożenie wielomianów zmiennej i.

Wykład I. Postać Trygonometryczna Liczb Zespolonych.

Moduł $|z|$ liczby zespolonej $z = (x, y)$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\ z)^2 + (Im\ z)^2}.$$



Rysunek:

Własności.

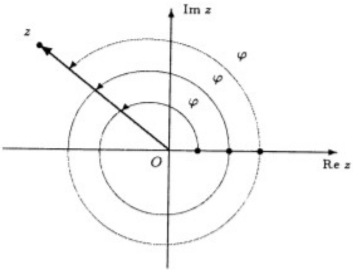
$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|, \qquad |z^{-1}| = |z|^{-1}, \ z^{-1} = \frac{1}{z}, \ z \neq 0.$$

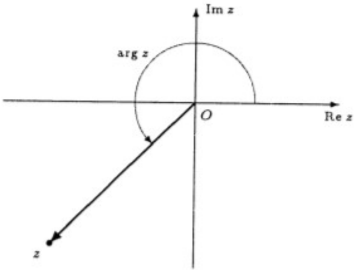
Argument główny $arg\ z$ liczby zespolonej $z \neq 0$

Argumentem głównym *arg z* liczby zespolonej z nazywamy kąt $\phi \in [0, 2\pi)$ między dodatnią częścią osi rzeczywistej oraz wektorem wodzącym liczby z – punktem płaszczyzny Euklidesowej.

Argument $Arg\ z$ liczby zespolonej $z \neq 0$

$$Arg\ z = arg\ z + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$





Postać Trygonometryczna

Każdą licbę zespoloną z można przestawić w postaci

$$z = |z|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi),$$

gdzie $\phi = Arg\ z$.

Fakt 3.

Niech $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\phi_1 + \phi_2) + \mathrm{i}\sin(\phi_1 + \phi_2)), \quad \phi_j = \mathrm{Arg}\ \mathrm{z_j}.$$

Wniosek z Faktu 3. Wzór de Moivre'a

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{n}\phi)), \qquad \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \quad \phi = \mathrm{Arg}\ \mathrm{z}.$$

Postać Wykładnicza Liczb Zespolonych.

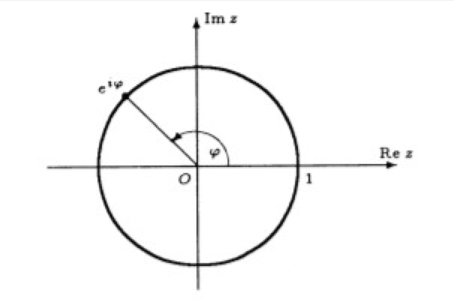
Liczbę zespoloną $z = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$ oznaczamy krótko przez $e^{\mathrm{i}\phi}$:

$$e^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$$

W szczególności

$$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = 0 + \mathrm{i}\cdot 1 = \mathrm{i}.$$

Interpretacja geometryczna



Postać Wykładnicza Liczb Zespolonych.

Postać Wykładnicza

Każdą licbę zespoloną z można przestawić w postaci

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},$$

gdzie $\phi = Arg\ z$.

Dla liczby zespolonej $z = (x, y) \in \mathbb{C}$

$$z = x + \mathrm{iy} = |\mathrm{z}|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) = |\mathrm{z}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},$$

gdzie

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = Arg\ z, \quad x = |z|\cos\phi, \quad y = |z|\sin\phi.$$

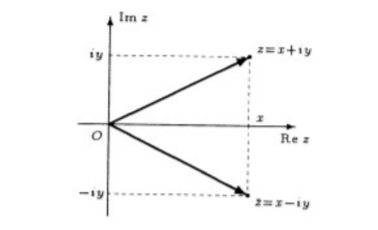
Sprzężenie liczb zespolonych.

Sprzężenie liczby zespolonej

Sprzężenie liczby zespolonej $z = x + \mathrm{iy}$ *nazywamy liczbę* $\overline{z}$ *określoną wzorem*

$$\overline{z} = x - \mathrm{iy}$$

Interpretacja geometryczna



Rysunek:

Sprzężenie liczb zespolonych.

Własności sprzężenia liczb zespolonych

- $\overline{z} \cdot z = \overline{z} \cdot z = |z|^2 = x^2 + y^2$;
- $|\overline{z}| = |z|$;
- $z + \overline{z} = 2x = 2Re\ z, \quad z - \overline{z} = 2\mathrm{iy} = 2\mathrm{iIm\ z}$;
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

Wzory Eulera

$$\cos\phi = \frac{e^{\mathrm{i}\phi} + e^{-\mathrm{i}\phi}}{2}, \qquad \sin\phi = \frac{e^{\mathrm{i}\phi} - e^{-\mathrm{i}\phi}}{2}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

Pierwiastki liczb zespolonych

Definicja.

Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ nazywamy <u>każdą</u> liczbę zespoloną $\omega \in \mathbb{C}$ spełniającą równość

$$\omega^n = z.$$

Zbiór pierwiastków stopnia n liczby $z \in \mathbb{C}$ oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Twierdzenie

Każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma dokladnie n pierwiastków stopnia n:

$$\sqrt[n]{z} = \{\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}\},$$

gdzie

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) \tag{1}$$

gdzie

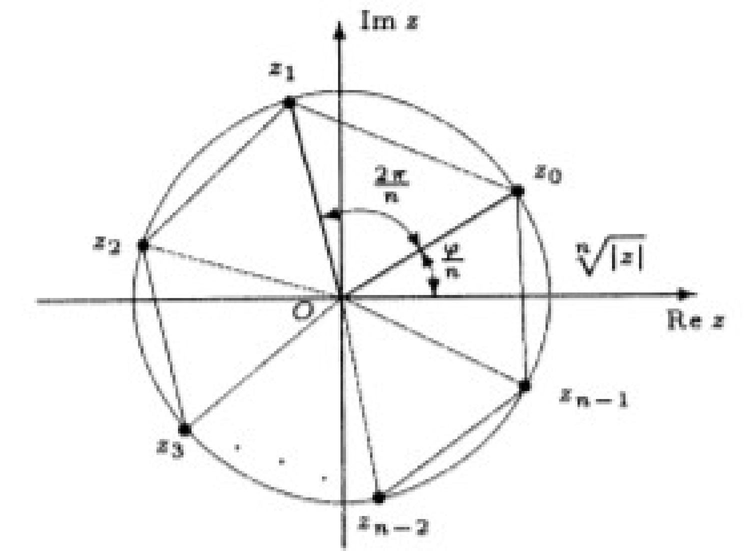
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad \phi = Arg\ z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uwaga

$|z|$ jest liczbą dodatnią $\Rightarrow$ pierwiastek $\sqrt[n]{|z|}$ w (1) jest pierwiastkiem arytmetycznym, tzn $\sqrt[n]{|z|}$ jest określony jednoznacznie i też jest liczbą dodatnią.

Pierwiastki liczb zespolonych

Interpretacja geometryczna



Dziękuję za Uwagę!

Rysunek: