Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

IMiIP, IO, 29.01.2019

1. *Znaleźć wartości i wektory własne następującej macierzy A. Obliczyć krotności algebraiczne i geometryczne. Wyznaczyć postać Jordana macierzy A.* (10pt)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. *Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu:*

$$W(z) = z^4 + 4z^3 + 15z^2 + 22z + 30.$$

wiedząc, że $z_1 = -1 + 2i$ *jest jednym z nich, oraz wybierz spośród nich te, które należą do zbioru* $\{z \in \mathbb{C} : \pi < Arg(z) < \frac{3\pi}{2}\}$. (8pt).

3. *Obliczyć wyznacznik, jeśli* $z = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i}$

$$\begin{vmatrix} z & 1 & z \\ 1 & z^2 & z \\ z & -z & -1 \end{vmatrix} \qquad (8pt)$$

4. *Dla jakich wartości parametru p układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie. Określić liczby rozwiązań w pozostałych przypadkach. (10pt)*:

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 7 \\ px + 2y + z = 8 \\ y + pz = 5 \end{cases}$$

5. *Niech operator liniowy L w przestrzeni Euklidesowej* $\mathbf{R}^3$ *jest dany wzorem*

$$L(x, y, z) = (x - y + 2z,\ 3y - z,\ 4z).$$

a) Znaleźć widmo operatora L. Czy operator L jest symetrycznym?
b) Znaleźć jądro operatora L i obliczyć $\dim ImL$.
c) Czy operator L jest różnowartościowym? Czy jest izomorfizmem?
d) Czy operator L jest diagonalizowalnym? (10pt).

6. *Za pomocą kryterium Sylvestera sprawdzić określoność formy kwadratowej:*

$$f(x, y, z) = -5x^2 - 2y^2 - 10z^2 + 2xy - 12xz + 6yz. \qquad (6pt)$$

7. *Niech* $\vec{h} = (1, 0, 1)$ *będzię wektorem presztrzeni Euklidesowej* $\mathbf{R}^3$. *Natomiast V podprzestrzeń* $\mathbf{R}^3$ *z bazą* $\vec{u}_1 = (2, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$ *oraz M podprzestrzeń* $\mathbf{R}^3$ *z bazą* $\vec{v}_1 = (-1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$. *Do której z podprzestrzeni V czy M odległość wektora* $\vec{h}$ *jest mniejsza? (8pt)*