Odwzorowania liniowe

1. Sprawdź z definicji, czy odwzorowanie T jest liniowe:
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2, x_2)$,
   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$,
   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x_1, x_2) = x_1 x_2$,
   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2, x_3 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$,
   (e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2, x_3)$,
   (f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x_1, x_2) = 5x_1 + x_2$,
   (g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2) = (x_1, 1)$,
   (h) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2) = (x_1 + 2, 2x_2)$.

   Jeśli odwzorowanie jest liniowe, wyznacz jego macierz, jądro i sprawdź, czy to odwzorowanie jest izomorfizmem.

2. Dane jest odwzorowanie liniowe T takie, że:
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(1, 3) = (1, 1),\ T(1, 1) = (0, 1)$. Obliczyć $T(-1, 3)$.
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(1, 2) = (1, 0, 1),\ T(1, 1) = (0, 1, 1)$. Obliczyć $T(2, 1)$.
   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(2, -1) = (1, -1, 1),\ T(-1, 0) = (0, 1, 0)$. Obliczyć $T(-1, 2)$.

3. Niech R_Θ oznacz macierz obrotu o kąt $\Theta \in [0, 2\pi)$. Czy $R_{\Theta_1} R_{\Theta_2} = R_{\Theta_1+\Theta_2}$? Wyznacz $R_\Theta R_{-\Theta}$.

4. Dane są odwzorowania $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$, $S(x_1, x_2) = x_1, 2x_1 - x_2$ Czy
   (a) $\mathcal{M}_{T\circ S}$ jest nieosobliwa?
   (b) Rank $M_T = 1$.
   (c) $S + T$ jest izomorfizmem?
   (d) $R(x_1, x_2) = T(S(x_1, x_2)) + (1, 0)$ nie jest odwzorowaniem liniowym.

5. Dla danego odwzorowania liniowego T wyznaczyć jego macierz M_T , sprawdzić, czy jest to izomorfizm, jeżli to możliwe wyznaczyć $M_{T^{-1}}$ i T^{-1}.
   (a) $T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + 4x_2)$,
   (b) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 3x_2, x_1 + x_2, 5x_3)$,
   (c) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 - 2x_1, 4x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)$.

6. Dane są odwzorowania liniowe: T oraz S: $S(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$ a macierz złożenia $M_{S\circ T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć wzór odwzorowania T.

7. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz baza $B = (e_1, e_2, e_3)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$
   (a) pokaż, że $B_2(v_1, v_2, v_3)$, gdzie $v_1 = -3e_1 + e_2$, $v_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $v_3 = 3e_1 - e_2 - e_3$ jest bazą w $\mathbb{R}^3$.
   (b) Zakładając, że A jest macierzą odwzorowania liniowego w bazie B_2, wyznacz $T(w)$ dla $w = 3e_1 - e_2 - e_3$
   (c) Wyznacz jądro odwzorowania T oraz jego bazę.