Zadanie 1. Uzasadnij, w oparciu o definicję, że zbiór wszystkich rzeczywistych macierzy trójkątnych górnych stopnia 2 wraz z dodawaniem macierzy i mnożeniem przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową

Zadanie 2. Sprawdź, czy podane zbiory W są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednich przestrzeni liniowych V

a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = 3y, \}, \quad V = \mathbb{R}^2,$

b) $W = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = p'(0)\}, \quad V = \mathbb{R}[x],$

c) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = z - t\}, \quad V = \mathbb{R}^4,$

Zadanie 3. Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami wskazanych przestrzeni liniowych

a)
$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0 \text{ lub } x = y\},$$
$$W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0 \text{ i } x = y\}, \quad V = \mathbb{R}^2,$$

b)
$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y = 0 \text{ i } 3x - y = 0\},$$
$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y = 0 \text{ lub } 3x - y = 0\}, \quad V = \mathbb{R}^3,$$

c)
$$W_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(0) = p(1) = 0 \text{ lub wielomian } p \text{ ma co najmniej dwa miejsca zerowe}\},$$
$$W_2 = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(0) = p(1) = 0 \text{ i wielomian } p \text{ ma co najmniej dwa miejsca zerowe}\}, \quad V = \mathbb{R}[x],$$

Zadanie 4. Zbadaj liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach liniowych

a) $(1, -2, 3)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 2, -1)$ w $\mathbb{R}^3$,

b) $(1, -2, 3)$, $(1, 0, 1)$, $(-1, -2, 1)$ w $\mathbb{R}^3$,

c) $3 - x$, $4 + x$, $2x + 3$ w $\mathbb{R}[x]$,

d) $2 - x^3$, $3x + 2$, $x^2 + x - 1$ w $\mathbb{R}[x]$,

e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$

Zadanie 5. Wektory u, v, w, x są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej V. Zbadaj liniową niezależność wektorów

a) $u + v$, $v + w$, $u + w$,

b) $u - v$, $v - w$, w,

c) $u - v$, $v - w$, $w - x$, $x - u$.

Zadanie 6. W zależności od parametru k zbadać liniową niezależność wektorów
$$v_1 = (k^2, -k, 1), \qquad v_2 = (k^4, k^2, 1), \qquad v_3 = (k^6, -k^3, 1).$$

Zadanie 7. Znaleźć bazę przestrzeni

$$V = \{(x, y, z, t) = (a + b, 2a, b - a, 3b),\ a, b \in \mathbb{R}\},$$

w której dodatkowo, wszystkie współrzędne wektora $v = (3, 4, -1, 3)$ są równe 6.

Zadanie 8. Które spośród wektorów bazy standardowej w $\mathbb{R}^4$ można przyjąć jako uzupełnienie wektorów

$$v_1 = (1, 0, 0, 2), \qquad v_2 = (3, 0, -1, 0),$$

do bazy w przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 9. Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której wektor $v = (0, -1, 2)$ ma wszystkie współrzędne równe 1.

Zadanie 10. Sprawdź z definicji, czy wektory tworzą bazę w odpowiednich przestrzeniach:

a) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2)\}$, $\mathbb{R}^3$,

b) $B = \{(1, -1, 4), (3, 0, 1), (2, 1, -2)\}$, $\mathbb{R}^3$.

Znajdź współrzędne wektora $(0, 0, 1)$ w bazie.

Zadanie 11. Znajdź bazy i określ wymiar podanych przestrzeni liniowych:

1. $V = \{(x + y + z, x - y, x - z, y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$,
2. $V = \{(x, y, z, t) : 2x - y = z - t = 0\}$,
3. $V = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(2x) = 4xp'(x) + p(0)\}$.