Układy równań liniowych

1. Wyznacz rząd macierzy:

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad b)\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \qquad c)\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Znajdź w zależności od parametrów $k, l \in \mathbb{R}$ rząd macierzy $\begin{bmatrix} k & l & 1 \\ 1 & kl & 1 \\ 1 & l & k \end{bmatrix}$.

3. Dla jakich wartosci parametru $a \in R$ rząd macierzy $\begin{bmatrix} -2 & -1-a & 1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & a+a^2 & 1 \end{bmatrix}$ jest najwiekszy lub najmniejszy.

4. Zbadaj w zależności od parametru k ilość rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

W przypadku, gdy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, znajdź je stosując:

(a) metodę Gaussa;
(b) wzory Cramera;

5. Zbadaj rząd macierzy uzupełnionej następującego (rzeczywistego) układu równań w zależności od parametru rzeczywistego p oraz rozwiąż ten układ dla każdej wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (p+1)x - y - pz = 2p \\ x + py + 2pz = 1 \\ x + pz = 1 \\ px + y = 1 \end{cases}$$

6. W zależności od parametrów a i b rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = b \\ ax + 5y - z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

Odpowiedzi:

Zad.1. a) $rank(A) = 3$, $rank(B) = 2$, $rank(C) = 3$.

Zad.2. $rank(A) = 3$ dla $k \neq 1 \wedge k \neq -2 \wedge l \neq 0$, $rank(A) = 2$ dla $l = 0 \wedge k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ lub $k = -2 \wedge l \neq 0$,lub $l = 0 \wedge k = -2$, $rank(A) = 1$ dla $k = 1 \wedge l \neq 0$ lub $k = 1 \wedge l = 0$.

Zad.3. $rank(A) = 3$ dla $a \neq -1 \wedge a \neq 0$, $rank(A) = 2$ dla $a = 0$, $rank(A) = 2$ dla $a = -1$.

Zad.4. Dla $k \neq -2 \wedge k \neq 1$ $x = (-k^3 + k^2 + k - 1)/(k^3 - 3k + 2)$, $y = (k^2 - 2k^2 + 1)/(k^3 - 3k + 2)$, $z = (k^4 - 2k + 1)/(k^3 - 3k + 2)$ $k = -2$ brak rozwiązania, $k = 1$, $x = 1 - a - b$, $y = a$, $z = b$.

Zad.5. $rank(U) = 4$ dla $p \neq -1 \vee p \neq 1 \vee p \neq 0$, wtedy $Rank(U) > Rank(A) \Rightarrow$ brak rozwiązań.

- $p = 0$, $rank(U) = 2$, $rank(A) = 2$ $x = 1$, $y = 1$, $z = b$, $b \in \mathbb{R}$
- $p = 1$, $rank(U) = 3$, $rank(A) = 3$ $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$
- $p = -1$ $Rank(A) \neq Rank(U) \Rightarrow$ brak rozwiązań.

Zad.6. $rank(A) = 3$ dla $a \neq -2$ $x = \frac{b-2}{a+2}$, $y = \frac{8+9a+b-2ab}{13(a+2)}$, $z = \frac{3ab+6a+5b+14}{13(a+2)}$, $a = -2, b \neq 2$ brak rozwiązań, $a = -2, b = 2$, $x = -13z + 12$, $y = -5z + 5$, $z \in \mathbb{R}$