Macierze odwrotne

1. Sprawdź czy A oraz B są do siebie odwrotne dla:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Wyznacz macierz odwrotną:

(a) $[3]$, $[6]$, $[\frac{1}{18}]$;

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

3. Wyznacz macierz odwrotną do $\begin{bmatrix} -10 & 2 & -3 & 4 \\ -7 & 8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Uzywając metody bezwyznacznikowej wyznacz macierz odwrotną do macierzy:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

5. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy $C = A^{-1} \cdot B^T$, gdzie
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Uzasadnij, że dla macierzy kwadratowej A.

(a) Jeżeli $A^2 - A + I = \bar{0}$ to A jest nieosobliwa oraz $A^{-1} = I - A$.

(b) Jeżeli $A^k = \bar{0}$ to $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ dla $k \geqslant 1$.

7. Rozwiązać układy równań:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Odpowiedzi

zad.1 $AB = BA = I$.

zad.2 a)$[\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{6}]$, $[18]$,

b) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} \frac{5}{21} & \frac{5}{21} & -\frac{1}{21} \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{4}{21} \\ -\frac{5}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$, $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & 22 & 8 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & -3 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{15} & -\frac{56}{15} & -\frac{7}{5} & -\frac{8}{15} \\ \frac{1}{15} & -\frac{8}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

zad.3. Nie istnieje.

zad.4. Macierz odwrotna istnieje dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Wówczas $A^{-1} = \frac{1}{p-3} \begin{bmatrix} -3 & p \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

zad.5. $C^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$,

zad.6.a) Załóżmy nie wprost, że det$A$=0. Wówczas przekształcając wyjściowe równanie mamy $I = A - A^2$, i z tw. Cauchy'ego otrzymujemy (*)1 =det$A$·det$(I - A)$. Założyliśmy jednak, że det$A = 0$, czyli podstawiając do równania (*) mamy 1=0 - sprzeczność. Udowodniliśmy, że A jest nieosobliwa. Istnieje zatem A^{-1} taka, że $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Zatem $A^2 - A + I = A^2 - A + AA^{-1} = A(A - I + A^{-1}) = 0$. Mamy zatem dwie możliwości: Albo A jest macierzą zerową, ale to niemożliwe, bo jest nieosobliwa, albo $A - I + A^{-1} = 0$, skąd wynika, że $A^{-1} = I - A$.
rm b) Wystarczy obliczyć iloczyny $(I - A)^{-1}(I - A)$ oraz $(I - A)(I - A)^{-1}$ i pokazać, że w obu przypadkach otrzymujemy wartość I, po podstawieniu $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ oraz wykorzystaniu faktu, że $A^k = 0$.

zad.7. a) $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.
b) $(x, y, z) = (\frac{1}{8}, -\frac{9}{8}, \frac{23}{8})$.
c) $(x, y, z) = (-1, 2, -3)$,
d) $(x, y, z) = (\frac{11}{6}, -\frac{103}{48}, \frac{49}{48})$,

e) $(x, y, z) = (1, -1, 1, 2)$
f) $(x, y, z) = (-2, -4, -1, -6)$.