Zadanie 1. Podaj jawny wzór na wyznacznik macierzy wymiaru 1×1, 2×2, 3×3, 4×4.

Zadanie 2. Oblicz wyznaczniki:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 15 & 12 & 20 \\ 7 & 22 & 31 \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 7 & 5 & 7 \\ 8 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 9 & 12 \\ 4 & 10 & 14 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 3. Oblicz wyznaczniki:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 4 & 10 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 42 \\ 2 & 16 & 110 & 5 \\ 3 & 24 & 6 & 81 \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 4. Oblicz wyznaczniki:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 5. Niech dane będą macierze A i B wymiaru 10×10 i niech $\det A = 2$ i $\det B = 3$. Określamy kolejne macierze następująco:

1. $C = [c_{ij}]$, $c_{1j} = 2a_{1j}$, $c_{ij} = a_{ij}$, $\forall_{i \neq 1}$,
2. $D = [d_{ij}]$, $d_{i5} = 4a_{i5}$, $d_{ij} = a_{ij}$, $\forall_{j \neq 5}$,
3. $E = [e_{ij}]$, $e_{i5} = 3b_{i5}$, $e_{i7} = 12b_{i7}$, $e_{ij} = b_{ij}$, $\forall_{j \neq 5,7}$.

Oblicz wyznaczniki macierzy $C, D, E, ACD, B^T ACE, CBA^{-1}, [(AB^{-1}CD^{-1}E)^{-1}]^T$.

Zadanie 6. Wykaż, że wyznacznik równa się zero:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2x+36y & x+y & 3x+37y \\ 3 & 9 & 12 \\ 4x-y & 10y & 4x+9y \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} x^2+1 & x & (x+1)^2 \\ y^7 & -\frac{1}{2} & (\sqrt[7]{y}-1)(\sqrt[7]{y}+1) \\ x^2 & 2xy+2y^2 & (x+2y)^2 \end{vmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & x^y & 1 \\ (x+y)^2 & -2xy-y^2 & y^x & x^2 \\ 4 & 4 & 10 & 8 \\ \operatorname{tg} x & \operatorname{ctg} x & 6 & \frac{1}{\sin x \cos x} \end{vmatrix}.$$

Zadanie 7. Udowodnij, że wyznacznik macierzy diagonalnej jest iloczynem wyrazów na przekątnej. (Macierz diagonalna - macierz, zwykle kwadratowa, której wszystkie współczynniki leżące poza główną przekątną (główną diagonalą) są zerowe.)

Zadanie 8. Wyprowadź wzór na wyznacznik macierzy trójkątnej dolnej, (macierz trójkątna dolna - macierz kwadratowa, której wszystkie współczynniki leżące ponad główną diagonalą są zerowe).

Zadanie 9. Wyprowadź wzór na wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (macierz trójkątna dolna - macierz kwadratowa, której wszystkie współczynniki leżące poniżej główną diagonalą są zerowe)

Zadanie 10. Oblicz wyznaczniki:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{b)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n+1 & \dots & \dots & 2n+1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(2+n+1)}{2} & \dots & \dots & \frac{n(3n+2)}{2} \end{vmatrix},$$

$$\text{c)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+2 & n+3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^n & 3^n & \dots & \dots & (n+2)^n & (n+3)^n \\ 2^{n+1}-1 & \frac{1}{2}(3^{n+1}-1) & \dots & \dots & \frac{1}{n+1}((n+2)^{n+1}-1) & \frac{1}{n+2}((n+3)^{n+1}-1) \end{vmatrix}.$$

Zadanie 11. Znaleźć najmniejszą wartość wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} x & 5x+6 \\ -1 & x \end{vmatrix}.$$

Zadanie 12. Wartością własną macierzy A nazywamy taką liczbę λ, dla której spełnione jest równanie:

$$\det(A-\lambda I)=0.$$

Znaleźć wartości własne następujących macierzy:

$$\text{a)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{b)}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c)}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definicja 1. Niech A będzie dowolną macierzą wymiaru $m \times n$ i niech $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant \min\{m,n\}$. Minorem stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik utworzony z elementów tej macierzy stojących na przecięciu dowolnie wybranych k wierszy i k kolumn.

Definicja 2. Rzędem dowolnej macierzy A nazywamy taką liczbę naturalną r, że z macierzy A można wybrać przynajmniej jeden niezerowy minor stopnia r, natomiast wszystkie minory stopni większych od r, jeśli takie istnieją, są równe zero.

Uwaga 2 Operacje elementarne, które nie zmieniają rzędu macierzy:

a) dodanie do dowolnego wiersza (kolumny) innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez liczbę rzeczywistą,

b) zamiana miejscami dwóch wierszy (kolumn),

c) pomnożenie dowolnego wiersza (kolumny) przez liczbę różną od zera.

Zadanie 13. Wyznacz rzędy macierzy:

$$\text{a)}\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 16 & 7 & 14 \end{bmatrix}, \quad \text{b)}\begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 42 \\ 2 & 16 & 110 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{c)}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 14. Określ rząd macierzy w zależności od parametru k

$$\begin{bmatrix} 2 & k & 5 \\ 5 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 15. Określ rząd macierzy w zależności od parametru:

$$\begin{bmatrix} m & m+1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

Zadanie 16. Wykaż, że dla macierzy kwadratowej wymiaru $n \times n$ jej rząd jest równy n wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

Zadanie 17. Niech rząd macierzy wymiaru $n \times k$ wynosi p i niech prawdziwe będą zależności: $n < k$, $p < n$. Postępujemy następująco: po doprowadzeniu macierzy do postaci schodkowej skreślamy j ostatnich wierszy. Jak zmieni to rząd macierzy?

Zadanie 18. Sformułuj warunek na to, aby macierz diagonalna wymiaru $n \times n$ była rzędu p.

Zadanie 19. Wykaż, że jeśli pewna potęga macierzy kwadratowej $n \times n$ nie jest rzędu n, to macierz ta również nie jest rzędu n.

Odpowiedzi:

Zad.1. a)a_{11}, b)$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, c)$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$, d)$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.
Zad.2. a)0, b)-384, c)0, d)0.
Zad.3. a)280, b)0, c)0.
Zad.4. a)945, b)22.
Zad.5. Kolejno mamy $4, 8, 108, 64, 2592, 6, \frac{1}{36}$.
Zad.6. a)$k_3 = k_1 + k_2$, b)$k_3 = k_1 + 2k_2$, c)$k_4 = k_1 + k_2$.
Zad.7. Pokażemy, że dla takiej macierzy $A_{n\times n}$ wymiaru $n \times n$ $\det A_{n\times n} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. Prowadzimy dowód indukcyjny ze względu na n - rozmiar macierzy. Dla $n = 2$ równość $\det A_{n\times n} = a_{11}a_{22}$ jest oczywista. Załóżmy zatem, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnego n. Wykażemy, że zachodzi także dla $n+1$. Wówczas $\det A_{(n+1)\times(n+1)} = (-1)^{n+1+n+1}a_{n+1,n+1}\det A_{n,n}$ (rozwinięcie Laplace'a względem ostaniej kolumny/wiersza - pozostałe składniki się zerują). Na mocy założenia indukcyjnego mamy $\det A_{(n+1)\times(n+1)} = a_{n+1,n+1}a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie zostało wykazane dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
Zad.8. Można wykazać analogicznie jak w zadaniu 7., że $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
Zad.9. Można wykazać analogicznie jak w zadaniu 7., że $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Zad.10. a)$1 + (-1)^{n+1}$, b)0, c)0.
Zad.11. $-\frac{1}{4}$.
Zad.12. a)$1, 2, 3$, b)$-1, 0, 3$, c)$5, \frac{9-\sqrt{193}}{2}, \frac{9+\sqrt{193}}{2}$.
Zad.13. a)3, b)3, c)3, d)3, e)5.
Zad.14. Dla $k \in \mathbb{R}$ rząd $= 3$; dla $k \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{39i+7}{2}, \frac{-39i+7}{2}\}$ rząd $= 3$, dla $k \in \{\frac{39i+7}{2}, \frac{-39i+7}{2}\}$ rząd $= 2$.
Zad.15. Dla $k \neq 0$ i $m \neq 1$ rząd= 4. Dla $m = 1$ i $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ rząd=3. Dla $k = 0$ i $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ rząd=3. Dla $m = 1$ i $k = 0$ rząd=2.
Zad.16. Wynika wprost z definicji 1 oraz 2.
Zad.17. Dla $j \leqslant n - p$ rząd się nie zmieni. Dla $j > n - p$ rząd wynosi $n - j$.
Zad.18.$a_{p+1,p+1} = a_{p+2,p+2} = \cdots = a_{nn} = 0$.
Zad.19. Wskazówka: wykorzystaj twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku.