Zadanie 1. Oblicz

$$a)(-3+3i)+(5-6i),\quad b)(7i+9)-(3-16i),\quad c)\Big(\frac{3}{2}+3i\Big)\cdot(8-6i),\quad d)\frac{2-3i}{5+4i}.$$

Zadanie 2. Niech $z=2+3i$, $u=3-i$, $w=2+2i$. Oblicz

$$a)2w-z,\quad b)\overline{w}+uz,\quad c)z^2-u\quad d)2\overline{u}-w+3zwu,\quad e)\overline{w^3}-2u+z,$$

$$f)z+w^2u^2,\quad g)\overline{\frac{z+w}{u}},\quad h)\frac{z^2}{w^2},\quad i)\frac{uwz}{zwu}.$$

Zadanie 3. Znajdź rozwiązanie równania na płaszczyźnie zespolonej:

$$a)z^2+6z+5=0,\quad b)z^2+5z+9=0,\quad c)z^3+6z^2+2z+12=0,\quad d)z^4+4z^2+3=0,$$

$$e)z^4+5z^2+6=0.$$

Zadanie 4. Podaj interpretację geometryczną następujących liczb $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$a)z,\qquad b)\overline{z},\qquad c)z_1+z_2,\qquad d)z_1-z_2,\qquad e)\,|z|\,.$$

Zadanie 5. Dla liczb zespolonych uzasadnij:

$$a)\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\qquad b)z\overline{z}=|z|^2,\qquad c)\,|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|\,,\qquad d)\mathfrak{Re}z\leqslant|z|\ \text{oraz}\ \mathfrak{Im}z\leqslant|z|\,,$$

$$e)\,|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\,,\qquad f)\,||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\,.$$

Zadanie 6. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz liczby zespolone z, dla których

a)liczba $\dfrac{z+4}{z-2i}$ jest rzeczywista, b)liczba $\dfrac{z}{iz+4}$ jest czysto urojona,

c)liczba $\dfrac{(z-a)^2\,\overline{z-a}}{z-a}-2$ jest niedodatnia, d)liczba $\dfrac{z+i}{z-i}$ nie jest ujemna.

Zadanie 7. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz wszystkie liczby zespolone z, których moduł jest liczbą całkowitą i dla których liczba $z^2+(1+i)z$ jest czysto urojona.

Zadanie 8. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej następujące zbiory:

$$a)\{z\in\mathbb{C}\colon |z+1-2i|=3\},\quad b)\{z\in\mathbb{C}\colon \frac{\pi}{6}<\arg z\leqslant\frac{2\pi}{3}\},\quad c)\{z\in\mathbb{C}\colon \arg(z+2-i)=\pi\},$$

$$d)\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Im}z\neq2\wedge\mathrm{Re}z=4\},\quad e)\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}z>2\},\quad f)\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=3\},\quad g)\{z\in\mathbb{C}\colon z\overline{z}=0\},$$

$$h)\{z\in\mathbb{C}\colon \overline{z}=-z\},\quad i)\{z\in\mathbb{C}\colon 2z+i=8\},\quad j)\{z\in\mathbb{C}\colon z^4=1\},\quad k)\{z\in\mathbb{C}\colon (z-1+2i)^2=9\},$$

$$l)\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}z-z=\mathrm{Im}z\},\quad m)\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}z+\mathrm{Im}z>0\wedge\mathrm{Im}z=|z|\},\quad n)\{z\in\mathbb{C}\colon |\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|<4\},$$

$$o)\{z\in\mathbb{C}\colon 4<2|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|<8\},\quad p)\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Im}[(1+2i)z-3)]<0\},\quad q)\{z\in\mathbb{C}\colon \pi\leqslant\arg[(-1+i)z]\leqslant\frac{3\pi}{2}\}.$$

Zadanie 9. Wyznacz postać trygonometryczną i wykładniczą liczb zespolonych

$$z_1=-1,\quad z_2=1,\quad z_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_5=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i,\quad z_6=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{27}}{2}i,$$

$$z_7=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\quad z_8=1+i,\quad z_9=1-i,\quad z_{10}=-7+7i,\quad z_{11}=22i,\quad z_{12}=2020.$$

Zadanie 10. Korzystając z wyników poprzedniego zadania wyznacz

$$(z_i)^n, \quad i \in \{1, \dots, 12\}, \quad n \in \{2, 5, 7, 10, 22\}.$$

Wskazówka: Użyj wzoru de Moivre'a.

Zadanie 11. Rozwiąż równania:

$$\text{a)} z^4 = 1, \qquad \text{b)} z^6 = 1, \qquad \text{c)} z^8 = 1, \qquad \text{d)} z^{16} = 1, \qquad \text{e)} z^{2^n} = 1.$$

Następnie oblicz pola wielokątów foremnych powstałych z połączenia ze sobą punktów na płaszczyźnie zespolonej reprezentujących rozwiązania.

Zadanie 12. Oblicz i zaznacz na płaszczyźnie zespolonej:

$$\text{a)} \sqrt[3]{8i}, \qquad \text{b)} \sqrt[3]{-2-2i}, \qquad \text{c)} \sqrt{-7-24i}, \qquad \text{d)} z^3 = (1-i)^3, \qquad \text{e)} (z-i)^4 = (iz+3)^4.$$

Zadanie 13. Rozstrzygnij wpływ n-krotnego sprzężenia na liczbę zespoloną. Poczynioną obserwację udowodnij indukcyjnie.

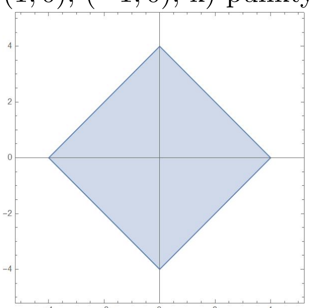
Zadanie 14. Rozwiąż równania:

$$\text{a)} z^8 = 1 + i, \qquad \text{b)} z^6 - iz^3 = 0, \qquad \text{c)} z^{1024} = z^{1020} + \sqrt{3} z^{1020}, \qquad \text{d)} z^7 - i = \sqrt{3},$$

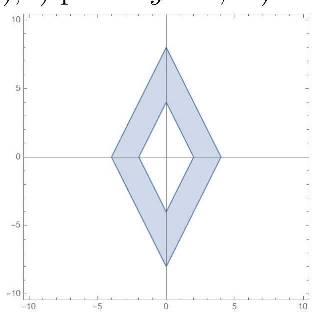
$$\text{e)} z^3 + z^2 - iz + i = 0.$$

Odpowiedzi:

Zad.1. a)$2 - 3i$, b)$6 + 23i$, c)$30 + 15i$, d)$\frac{1}{41}(-2 - 23i)$.
Zad.2. a)$2 + i$, b)$11 + 5i$, c)$-8 + 13i$, d)$16 + 96i$, e)$-20 - 11i$, f)$50 + 67i$, g)$\frac{1}{10}(17 - 11i)$ h)$\frac{3}{2} + \frac{5}{8}i$, i)1.
Zad.3. a)$z_1 = -1, z_2 = -5$, b)$z_1 = \frac{-5+\sqrt{11}i}{2}, z_2 = \frac{-5-\sqrt{11}i}{2}$, c)$z_1 = \sqrt{2}i, z_2 = -\sqrt{2}i, z_3 = -6$, d)$z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = \sqrt{3}i, z_4 = -\sqrt{3}i$, e)$z_1 = \sqrt{2}i, z_2 = -\sqrt{2}i, z_3 = -\sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3}i$.
Zad.6. a) $\left\{(x, y) : y = \frac{1}{2}x + 2, x \neq 0\right\}$, b)$\{(x, y) : x = 0,\ y \neq 4\}$, c) $\left\{z : 0 < |z - a| \leqslant \sqrt{2}\right\}$, d)$\{(x, y) :\ x = 0, y \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)\}$
Zad.7. Graficznie: rozwiązania znajdują się na przecięciu okręgów postaci $x^2 + y^2 = k^2$, gdzie k - liczba całkowita z prostymi $x = y$, $y = -x - 1$.
Zad.8. *a*) Okrąg o środku w $(-1, 2)$ i promieniu 3, b) część płaszczyzny pomiędzy kątem $\pi/6$ (bez), a kątem $2\pi/3$ (wraz z tą półprostą), c)półprosta $y = 0$, $x \in (-\infty, 0]$ przesunięta o wektor [-2,1], d) prosta $x = 4$ z wyłączenie punktu $y = 2$, e) część płaszczyzny spełniająca warunek $x > 2$, f) okrąg o środku $(0, 0)$ i promieniu 3, g) punkt $(0, 0)$, h) prosta $x = 0$, i) punkt $(4, -\frac{1}{2})$, j) punkty $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, k) punkty $(-2, -2)$, $(4, -2)$, l) prosta $y = 0$, m) $x = 0$, $y > 0$ n)(bez brzegów)



o)(bez brzegów)



p) $x < -\frac{1}{2}y$, q) część płaszczyzny pomiedzy kątami $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{3\pi}{4}$ wraz z tymi kątami.
Zad.9. $z_1 = (\cos(\pi) + i\sin(\pi))$, $z_1 = e^{i\pi}$, $z_2 = (\cos(0) + i\sin(0))$, $z_2 = e^0$, $z_3 = (\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$,

$z_3 = e^{i\pi/3}$, $z_4 = (\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3}))$, $z_4 = e^{i5\pi/3}$, $z_5 = \frac{1}{2}(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$, $z_5 = \frac{1}{2}e^{2i\pi/3}$, $z_6 = 3(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3}))$, $z_6 = 3e^{4i\pi/3}$, $z_7 = (\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$, $z_7 = e^{i\pi/4}$, $z_8 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$, $z_8 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $z_9 = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4}))$, $z_9 = \sqrt{2}e^{7i\pi/4}$, $z_{10} = 7\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$, $z_{10} = 7\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$, $z_{11} = 22(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$, $z_{11} = 22e^{i\pi/2}$, $z_{12} = 2020(\cos(0) + i\sin(0))$, $z_{12} = 2020e^0$

Zad.10. $(z_3)^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, (z_3)^5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, (z_3)^7 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, (z_3)^{10} = (z_3)^{22} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$(z_5)^2 = -\frac{1}{8} - i\frac{\sqrt{3}}{8}, (z_5)^5 = -\frac{1}{64} - i\frac{\sqrt{3}}{64}, (z_5)^7 = -\frac{1}{256} + i\frac{\sqrt{3}}{256}, (z_5)^{10} = -\frac{1}{2048} + i\frac{\sqrt{3}}{2048}, (z_5)^{22} = -\frac{1}{2^{23}} + i\frac{\sqrt{3}}{2^{23}}$,
$(z_7)^2 = i, (z_7)^5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, (z_7)^7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, (z_7)^{10} = i, (z_7)^{22} = -i$,
$(z_9)^2 = -2i, (z_9)^5 = -4 + 4i, (z_9)^7 = 8 + 8i, (z_9)^{10} = -32i, (z_9)^{22} = 2048i$.

Zad.11. Wskazówka: Wzór na pole $n-$kąta foremnego: $P = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{2\pi}{n}$, gdzie R - promień okręgu opisanego na n-kącie foremnym

a)$1, -1, -i, i, P = 2$,

b)$1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

c)$1, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

d)$1, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, (\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}), i, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, (-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}), -1, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, (-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}), -i, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

e)$z_k = \cos\frac{k\pi}{2^{n-1}} + i\sin\frac{k\pi}{2^{n-1}}, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$.

Zad.12. a)$\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i$**,** b)$1 - i, \frac{1}{2}(\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + i\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}), \frac{1}{2}(-\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - i\sqrt{4 - 2\sqrt{3}})$,
c)$3 - 4i, -3 + 4i$**,** d)$1 - i, \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$**,** e)$1 + 2i, -1 + 2i, 2i$.

Zad.14. a)$2^{\frac{1}{16}}e^{i\frac{\pi}{32}}, 2^{\frac{1}{16}}e^{i\frac{9\pi}{32}}, 2^{\frac{1}{16}}e^{i\frac{17\pi}{32}}, 2^{\frac{1}{16}}e^{i\frac{25\pi}{32}}, 2^{\frac{1}{16}}e^{i\frac{33\pi}{32}}, 2^{\frac{1}{16}}e^{i\frac{41\pi}{32}}, 2^{\frac{1}{16}}e^{i\frac{49\pi}{32}}, 2^{\frac{1}{16}}e^{i\frac{57\pi}{32}}$,
b)$-i, 0, \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, c)$0, \sqrt[4]{1 + \sqrt{3}}, i\sqrt[4]{1 + \sqrt{3}}, -\sqrt[4]{1 + \sqrt{3}}, -i\sqrt[4]{1 + \sqrt{3}}$,
d)$2^{\frac{1}{7}}e^{i\frac{\pi}{42}}, 2^{\frac{1}{7}}e^{i\frac{13\pi}{42}}, 2^{\frac{1}{7}}e^{i\frac{25\pi}{42}}, 2^{\frac{1}{7}}e^{i\frac{37\pi}{42}}, 2^{\frac{1}{7}}e^{i\frac{49\pi}{42}}, 2^{\frac{1}{7}}e^{i\frac{61\pi}{42}}, 2^{\frac{1}{7}}e^{i\frac{73\pi}{42}}$,
e)$i, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-2}} + i\sqrt{\sqrt{5} - 2}, -\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-2}} - i\sqrt{\sqrt{5} - 2}$**.**